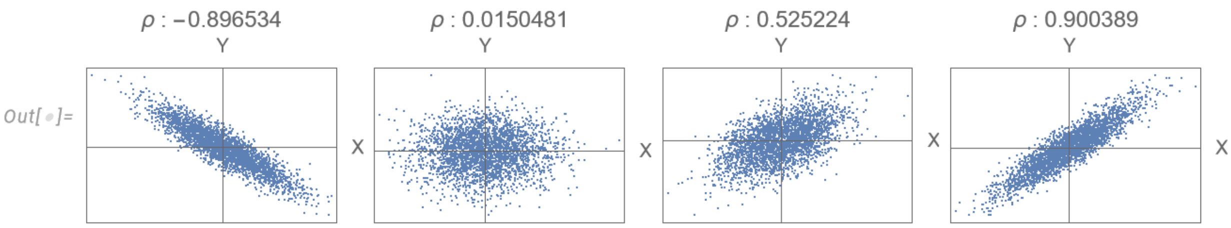
あら何ともなや１日は過ぎて雪もやみ（2 次元ガウス分布）

2023 年 2 月上旬　白田由香利

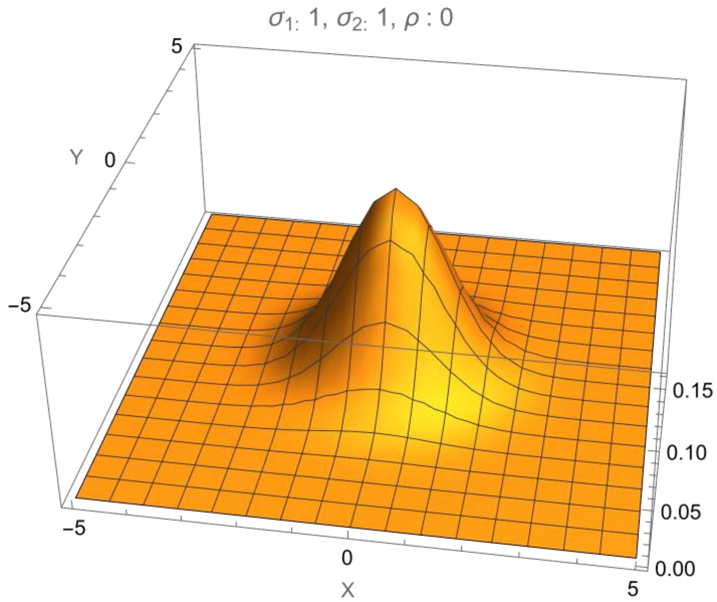
２月は寒い．そして大学は忙しいシーズンでもある．早起きして窓を開けると雪まで降ってきた．こういう時は，スーツの下にベストならぬ，霊獣チャンチャンコを羽織る．いつも私にお着物をくださる伯母が，「綿も薄く入っているし，これを道行コートの下に羽織ると暖かいから」と付けてくれた物で，30 年はゆうにたっていそうな気がする．獅子，龍などの霊獣がペールトーンで描かれている．いったいどういうコンセプトのデザインなのか考えるとおかしい．色合いからして女性用である．霊獣の顔もなんだか可愛らしい．え，それで唐獅子と龍ですか？　不思議やな，ピンクの龍とはこれいかに．ゲゲゲの鬼太郎のチャンチャンコは妖怪の霊毛で編まれているそうだ．「風邪をひかないように」という伯母の愛も霊毛に勝るともおとらず強そうな気がする．昔はフリースなどなかったから綿なのだろう．家の猫もこのチャンチャンコがお気に入りのようで，椅子にかけておくと，すぐに丸めてお腹の下に敷いている．猫も伯母さんの愛を感じているのか．

AI の数学の本には，２次元ガウス分布，多次元ガウス分布がよく出てくる．そこで，２次元ガウス分布の図を描いて，イメージをしっかり固めておこうと思う．

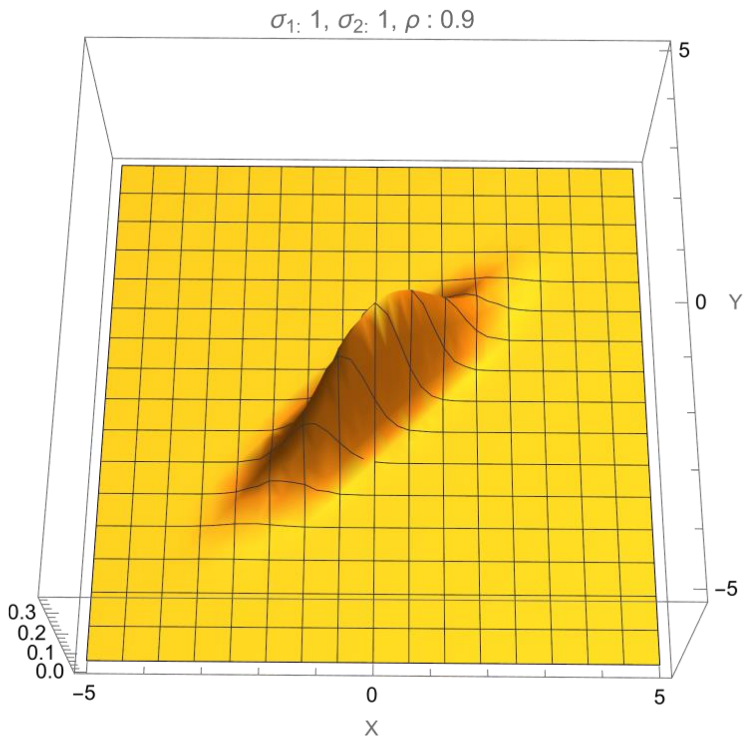
まず，重要なことは相関係数ρである．２変数 x，y があり，２次元ガウス分布に従う場合，その間の相関係数の値によって散布図が以下のように違ってくる．左から，およそ-0.9, 0, 0.5, 0.9 となっている．2 変数の標準偏差は 1 にしてある．



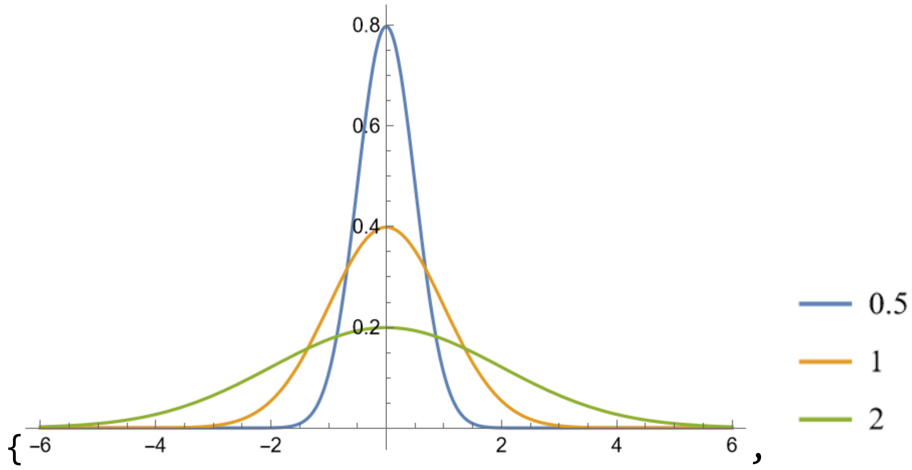
相関係数 0 というのは，2 変数間に相関がない場合で，図に示すようにクラウドがぼーと全方向に広がっている．相関が 0.5，そして 0.9 と正の値を取るに従い，データはエキスパンダーでえいっと伸ばされたように，45 度の方角に広がっている．相関係数 0 のときの 2 次元ガウス分布の確率密度関数を 3 次元で描画した．平均を(0,0)としたので，原点が確率密度も最も大きくなる．



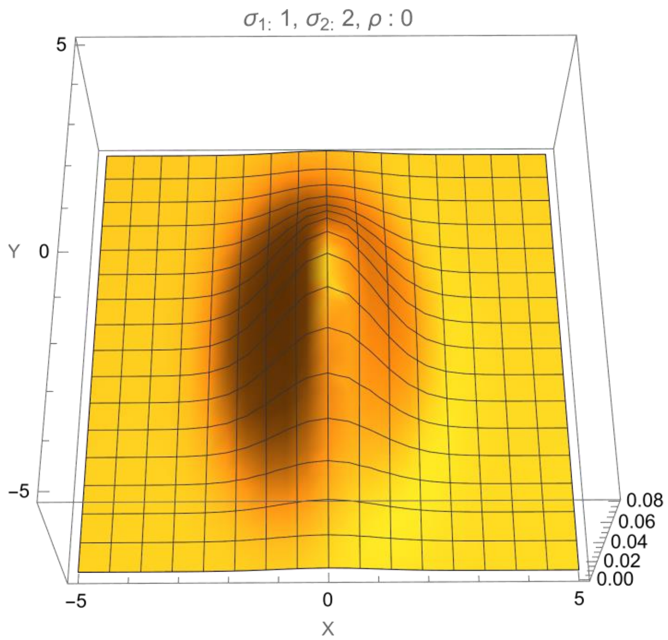
次に，相関係数を 0 から 0.9 に増加させると，以下のような確率密度関数となる．先ほどの相関係数 0.9 の散布図を 3 次元ヒストグラム化した図である．45 度方向に伸びている．



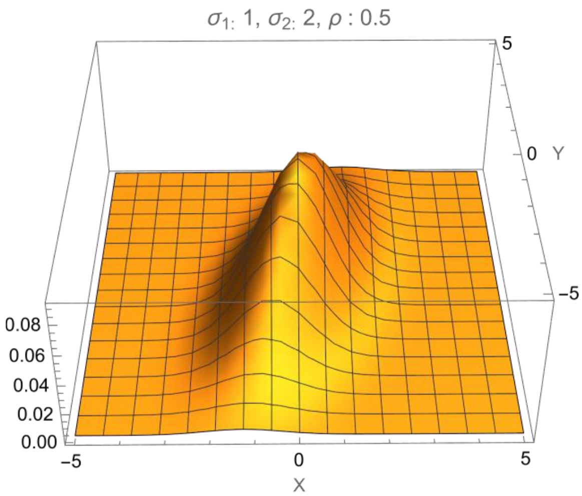
ρ で方向を決めた後，2 変数の標準偏差 σ を変えていく．まず，1 変数の正規分布をレビューしておこう．σ が 0.5, 1, 2 の場合で，標準化された正規分布の確率密度関数を描く．σ が大きくなるに従い，フラットなべたっと伸びた形状になる．

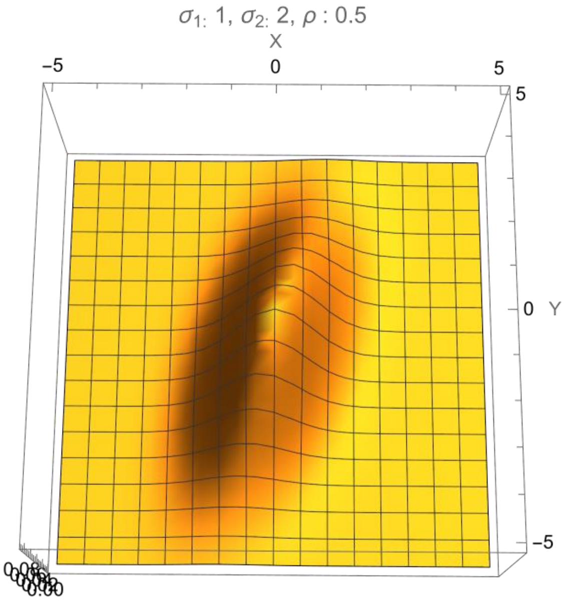


2 次元ガウス分布を，相関係数 0 のまま，変数 y の σ のみ 2 に増やす．以下のような y 方向に伸ばされた形状となる． y 方向にフラットになっている．

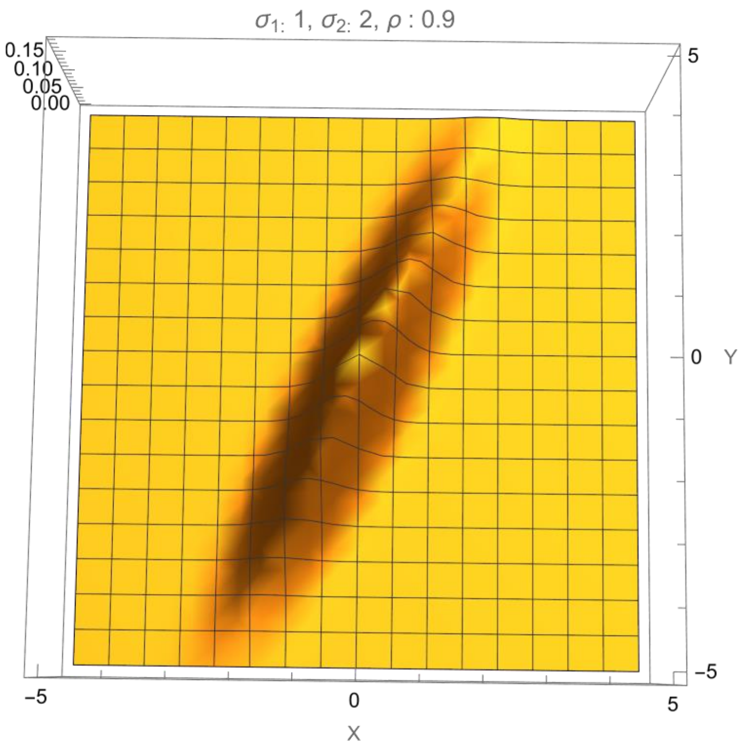


この状態で，相関係数を 0.5 に増やすと，以下の 2 枚の図のようになる．45 度方向に伸びていないのは， y の σ を 2 にしたので，その分 y 軸方向に間延びしているためである．

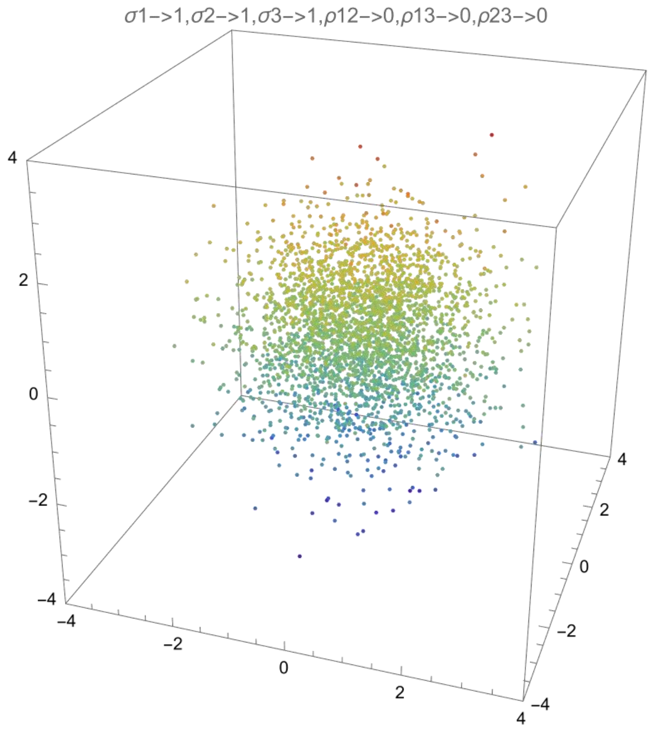


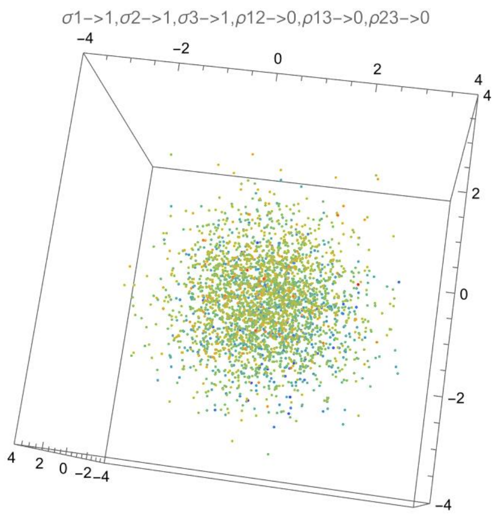


相関係数 0.5 を 0.9 に増やすと，以下のように，さらに引き伸ばされた形状になる．

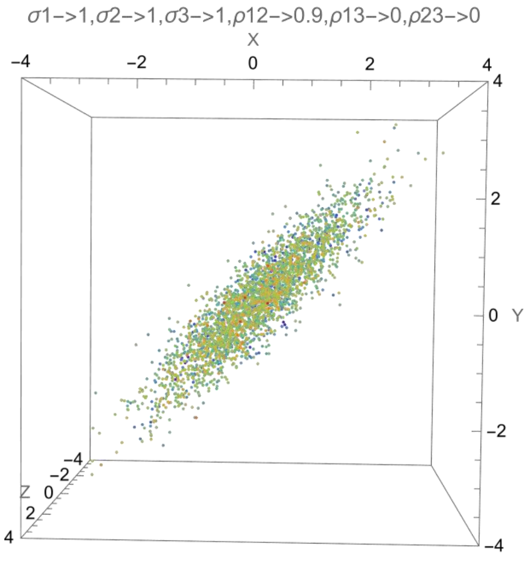


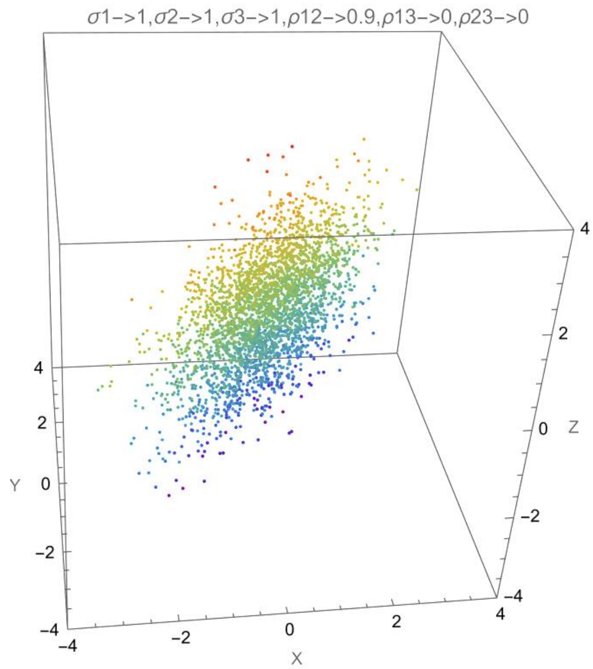
次に，3 次元ガウス分布をグラフィクスで表してみよう．確率密度関数を表すには 4 次元空間が必要だが，描けないので，3 次元ガウス分布に従うデータを生成して，3 次元散布図で表す．まず，相関係数 0 のガウス分布に従うデータである．3 変数の標準偏差は 1，相関は無し $\rho = 0$，としている．データが原点に近づくほど密に分布している．下右図のように 2 次元平面にマッピングすると，中心周辺が密であることが分かる．



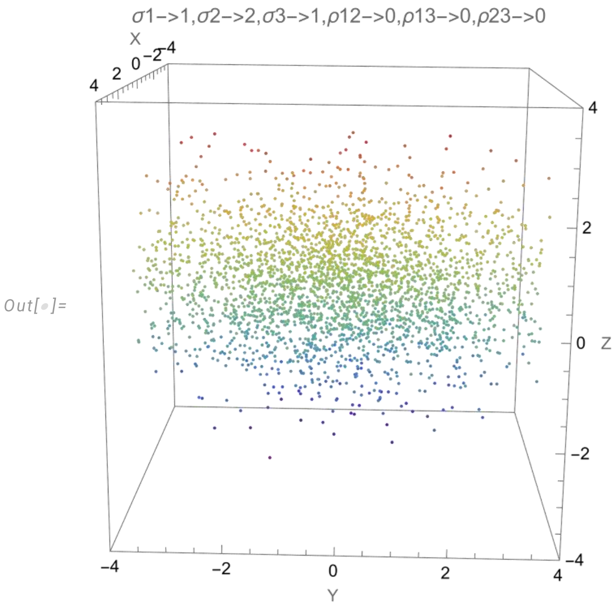


次に x と y の相関係数のみ 0.9 に増やす. 下左図のように x-y 平面にマッピングすると 45 度方向に伸びている. これを 3 次元空間内で見ると, 押しつぶされたエビせんべいのような形状となる（下右図参照).





今度は，y 方向のみ σ を 2 に増やしてみる．相関係数はすべて 0 とする．以下の図に示すように，y 方向にデータが拡散する．



次に，数式で見てみよう．ガウス分布は，以下の 2 つのパラメータで形状が定まる．

① 平均値（重心の位置）

例：原点(0,0)

② 共分散行列（標準偏差 σ，相関係数 ρ を含む）

2 変数の場合 $\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

3 変数の場合 $\begin{pmatrix} \sigma1^2 & \rho12\sigma1\sigma2 & \rho13\sigma1\sigma3 \\ \rho12\sigma1\sigma2 & \sigma2^2 & \rho23\sigma2\sigma3 \\ \rho13\sigma1\sigma3 & \rho23\sigma2\sigma3 & \sigma3^2 \end{pmatrix}$

以上

引用元　あら何ともなや昨日は過ぎて河豚汁（芭蕉）