卯の月や六日も常の夜には似ず　＜ANOVA　一元配置分散分析＞

2020 年 11 月中旬　白田由香利

2010 年 4 月，欧州中で飛行機が飛ばずオクスフォードに足止めされていたが，ようやく ANA から連絡が入った.「もしかすると明日，飛行機が飛べるかかもしれないのでヒースロー空港に来てください」. 確率は 50-50 でどうなるか全く分からない．そこで，スーツケース 2 人分を Ma 先生に預け，「もし帰国できたらスーツケースを日本に送ってほしいが，しかし，もしかすると，夜またここに戻るかもしれない」とお願いをした．飛行機が飛ぶとなれば空港は人が押し寄せ大混雑になることは必至である．その際に身軽に動けるように手ぶらのほうがよいからだ．ベッドに入っても明日のダッシュを頭の中でシミュレーションすると興奮してくる．朝食も取らず，早朝ヒースローに向かった．ターミナル 3 へ駆け込み ANA のスタッフに状況を聞く．「まだ予断を許さないので，順番待ちの札をもって待機して x x 時になったらここへ来て並んで下さい」とのこと．空港には，ここで夜を明かした日本人観光客が見受けられた．体へのダメージが大きいので，可能な限り，空港の床の上で寝るのは避けたほうがいいと思う．巨大な飛行場が普段とは違う，興奮と熱気に包まれている．時間が来るまでカフェでなるべくゆったり体を休めておきたい．カオスのここは離れて中央バスステーションの比較的すいているカフェに移動することにした．また，待ち行列の混雑を思うと，もう一人仲間はほしいところだ．二人では片方が水を飲みに行くにも心細い．そこで，信頼できそうな日本人の若者を誘って，3 人でカフェへ移動した．彼は日本の HIS の社員の人で，休暇でロンドン支社に来たところ大惨事に遭遇してしまったそうだ．ロンドン支社の社員の人たちから頻繁に状況を案ずる電話がかかってくる．

さて，分散分析を説明する．分散分析 ANOVA（Analysis of Variance）で最も基礎的な手法は，1 元配置分散分析である．何かの要因の効果を調べるため，要因ごとにグループを作成し，全グループで母平均が等しいか否かを検定す．グループは 3 以上である．ANOVA は 3 個以上のグループの母平均の比較を行う．

典型的な例としては，薬 A，B，C の効果を 200 人ずつのグループを 3 つ作り投与して，何かの数値（血圧，体重等）の母平均が等しいか否かを検定する．なぜ母平均かというと，知りたいことは標本の 200 個のデータの標本平均ではなく，その後ろに控える大きな母集団の平均の比較を行いたいからである．

1 元配置分散分析：

帰無仮説：　全グループの母平均は等しい　$\boldsymbol{\mu_A = \mu_B = \mu_C}$

対立仮説：　全グループの母平均が等しいわけではない　NOT$\boldsymbol{(\mu_A = \mu_B = \mu_C)}$

薬 B が最も効果がありそうだと思って分散分析を行ったとしよう．しかし，たとえ帰無仮説が棄却されても，分散分析では，「全ての母平均が等しい」のではない，ということしか言えない．それを言う為には，**多重比較法**を使う．多くの場合，分散分析の後で多重比較も続けて行う．

ANOVA の例を示す.

＊経営数学を教える手法として，A,B,C の異なるメソッドでテストの点の母平均の比較を行う

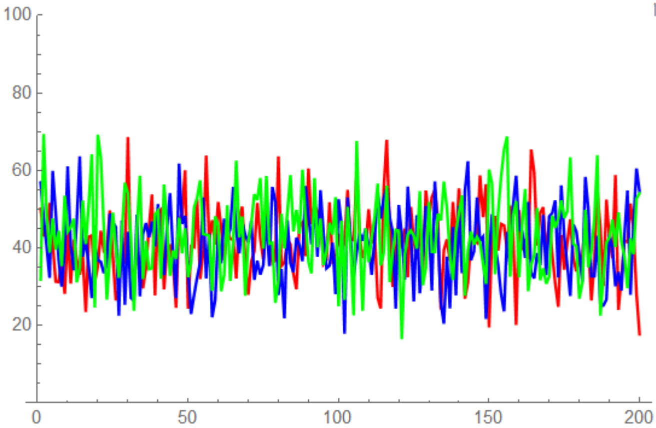
＊異なる車種 A,B,C で，1 キロ走ったときの二酸化炭素排出量の母平均の比較を行う

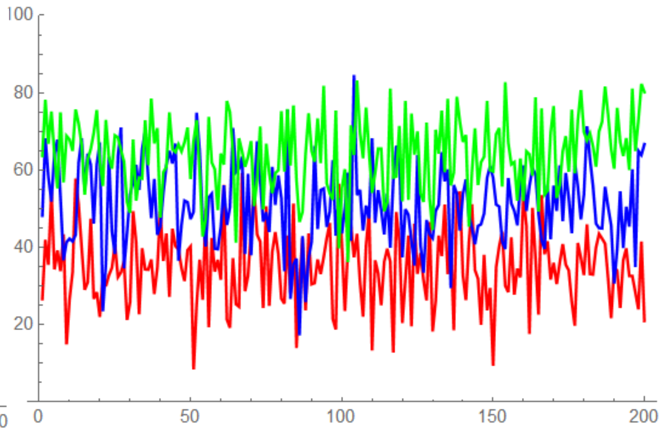
＊試験当日の朝食の内容 A,B,C で，経営数学の試験の点の母平均の比較を行う

＊コーヒー豆の焙煎方法 A,B,C で，抽出したコーヒー中のカフェインの含有量の母平均の比較を行う

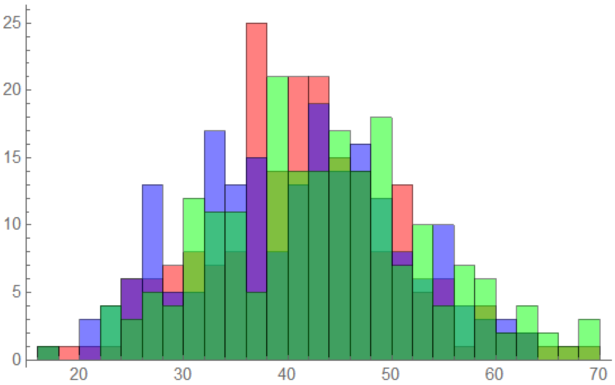
もちろん，要因の個数は増やせる．

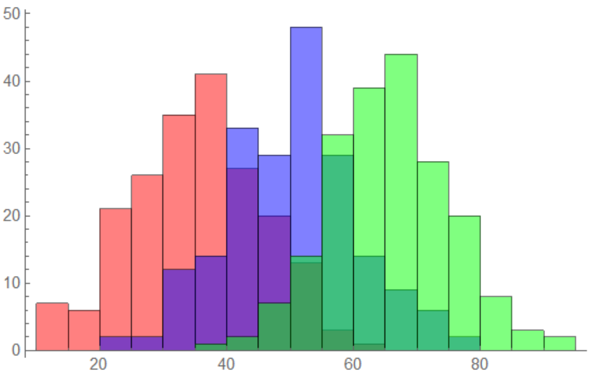
例として，1 番目の数学の教授法 A，B，C による効果の違いを調べたとする．各グループ 200 人に対してテストを行った．その効果に有意差がない場合とある場合の例を以下に示す．横軸は学生 ID で 200 までである，縦軸はテストの点である．母平均は，赤＜B 青＜C 緑　としてデータを生成したのだが，左ではその差が小さく有意差が見えないが，右は有意差が見える．左と右の結果では，各グループの分散は

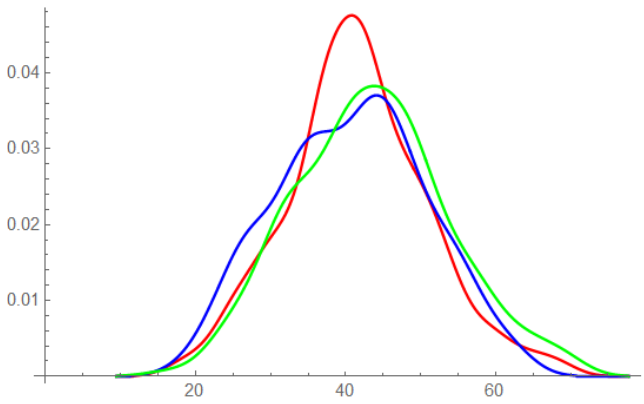


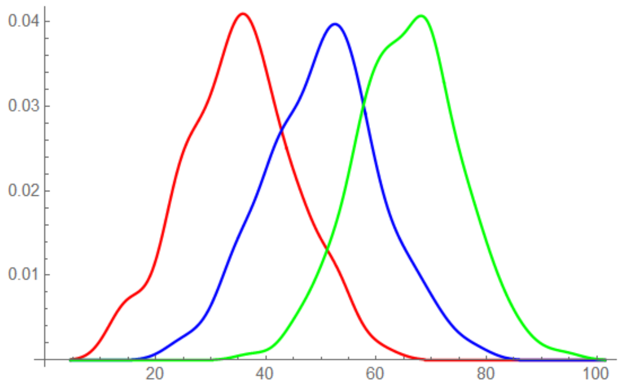


100 で同じであった．左の場合，グループごとの平均は若干存在するが，ノイズのような分散の影に隠されてしまってその差は見づらい．一方右図では，A 赤＜B 青＜C 緑の差が十分見えるほどに大きい．大事な点は，ノイズのような誤差要因の項の揺れよりも，本質的な方法の違いのほうが大きいか否かである．差が見えるかどうか，ヒストグラムを描いてみた．また，そのヒストグラムを平滑化した確率分布を描いてみた．右のほうで 3 グループの違いが見える．









統計の用語で，要因の影響によるグループ平均の値の分散を**グループ間分散**と呼び，誤差要因による分散を**グループ内分散**と呼ぶ．グループ間分散がグループ内分散に比較して十分大きければ，要素の違いによる影響はあった，と言える．そのため，**グループ間分散÷グループ内分散**という比を計算する．この比をＦ値と言うが，理論から，「各グループの分散が等しく(等分散性)，各グループの値が正規分布に従う(正規性）場合，このＦ値はＦ分布に従う」ことが分かっている．分散分析ではＦ値を計算して，Ｆ分布を使って検定を行う．

分散分析: 一元配置						
概要						
グループ	データの個数	合計	平均	分散		
A	200	8308.432	41.54216	88.35527		
B	200	8160.333	40.80166	98.10985		
C	200	8677.224	43.38612	104.5831		
分散分析表						
変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
グループ間	708.5294	2	354.2647	3.651608	0.026531	3.010815
グループ内	57918.6	597	97.01608			
合計	58627.13	599				

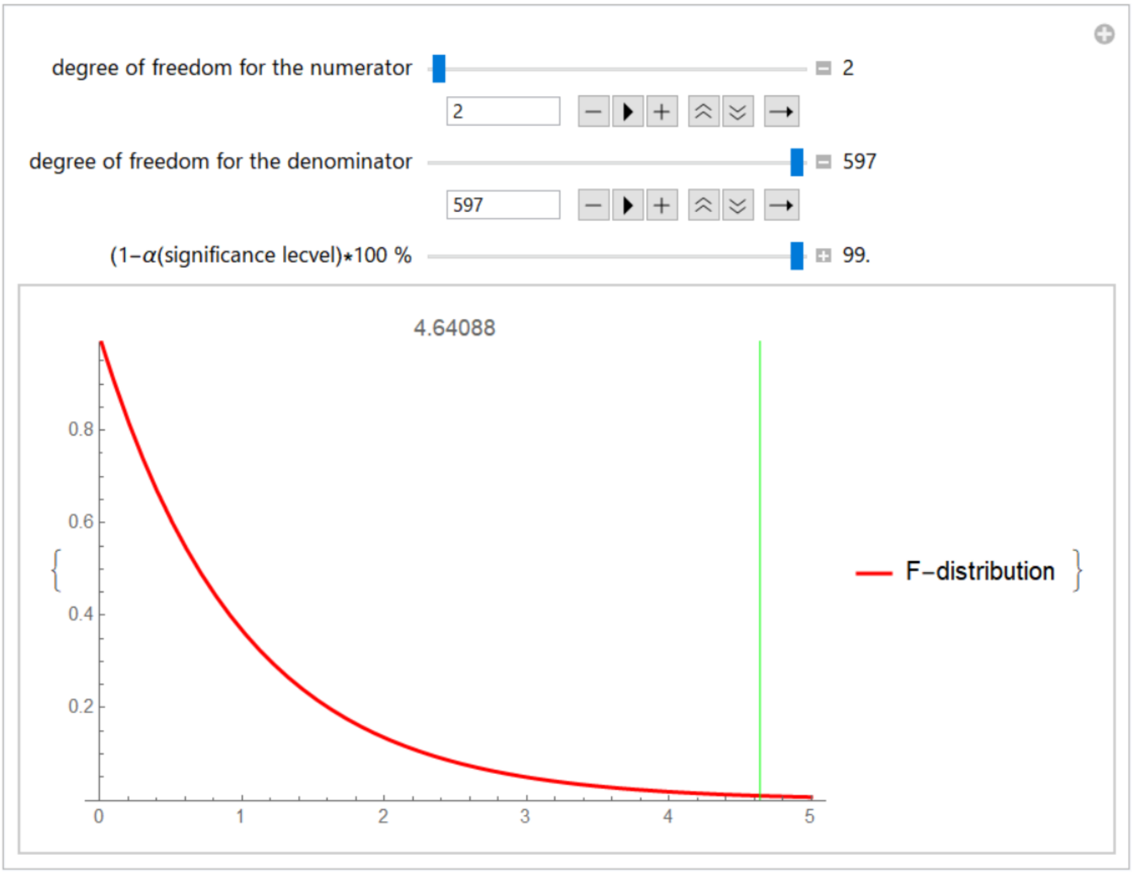
左に EXCEL で上図左の有意差が見えないほうのデータで一元配置 ANOVA を行った結果を示す．概要を見ると，標本平均が大きい順に，C,A,B となっている．A,B,C の分散値をみると，等分散性は保たれていそうである．

分散分析表を見ると，グループ間変動（偏差の平方和）が約 708 で，自由度は ABC の 3-1 で２，分散は 708÷２≅354　である．

数学の定義として,「**変動を自由度で割り算した値が分散**」である．

他方，グループ内分散とは，グループ内の 200 個のデータの変動を計算し，その３つをたして自由度 597 で割った値である．不偏分散は，変動を（n－1）で割ったことを思い出そう．標本平均を使うと，自由度が１減るから，3 グループで　(200－1)×３＝597　となる．次にどちらのグループ間分散が十分に大きいか調べるため，分散の比を計算する．354÷97≅3.65　この 3.65 の P 値は 2.65％であったので，もし有意水準を５％に取ると，帰無仮説は棄却される．P 値 2.65％は５％よりも小さい，と考えてもいいし，限界値が 3.01 なのに今回のＦ値 3.65 はその先に行ってしまった，と考えてもよい．上の EXCEL のＦ境界値 3.01 は有意水準５％の場合の値である．初めのビジュアルな予想に反して，帰無仮説は棄却されてしまったが，有意水準１％とすると，帰無仮説は棄却されない．以下ではＦ分布を見ながら，それを説明する．

F 分布は，パラメータを 2 つ取る．グループ間変動の自由度と，グループ内変動の自由度の 2 つである．F(２， ５９７)の分布は以下のようになる．有意水準 1 %の場合の限界値は 4.6 である．よって帰無仮説は棄却されない．母平均が等しいことは否定されなかった．



理解を深めるためにも，視覚的にも有意差が大いにある，右の図のデータでも ANOVA をして違いを見てみよう．

分散分析: 一元配置						
概要						
グループ	データの個数	合計	平均	分散		
A'	200	6787.353	33.93677	106.8419		
B'	200	9592.981	47.96491	89.1062		
C'	200	13063.74	65.31872	88.56664		
分散分析表						
変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
グループ間	98851.35	2	49425.68	521.1576	1.1E-131	3.010815
グループ内	56618.44	597	94.83825			
合計	155469.8	599				

右のデータはグループ名に‘をつけて，A’,B’,C’とした．注目したい値は分散比の F 値であるが，なんと，約 521 もある．これは有意水準 5 %の限界値 3.01 を大きく超えて，帰無仮説棄却領域に落ちている．よって，帰無仮説は棄却される．使用する F 分布の図は先ほどと同じである．

終わり

引用元：文月や六日も常の夜には似ず　芭蕉

免税品両手に関の晴れ着かな　　＜ANOVA　二元配置分散分析繰り返しあり＞

　2010 年 4 月 Xday の話を続ける．ヒースロー空港ターミナル 3 で ANA の付近で，定刻になり行列ができたので，並ぶ．横入りを抑止するためにも，「もっとしっかり列を見ていてくださいよ」と ANA の現地スタッフに文句を言う．うるさいおばさん，この上ない私である．学生の諸君，こういう時サバイバルするために英語はしっかりやっておきましょう．初めにヴァージン航空(だったと思う)の日本への直行便が飛んだ．無事なようだ．これなら大丈夫そうだと，JAL，ANA と続けざまに飛ぶことになった．我々よりも優先されるべきビジネスクラスの人たちでも，連絡がとれずこの時刻にまだヒースローに到着できなかった人もいる．おかげでエコノミーの我々にもチケットが回ってきた．嬉しい，プラチナチケットを入手できた．手荷物検査場を通過するや否や H 教授と私は，さっと別れ，別行動で免税店に駆け込みしゃにむに買い物をする．この惨事中，多数の人にお世話になったからだ．一緒に行動していては思うように時間を活用できないので別行動である．二人の再集合は飛行機に乗りこむ時だ．席は皆，別々になったが，HIS の若者もきちんと乗れている．機内食などは用意ができなかったこと，もしかすると火山灰のためヒースローに戻るかもしれないこと，などがアナウンスされた．隣の初対面のご婦人と，いかにこの数日間，難儀をしたかという話を始めると，お互い止まらなくなった．化粧ポーチも全て置いてきたので「成田でテレビの人にカメラを向けられたら化粧もしていないのに困るわ」等というどうでもお喋りを延々と話していた．緊張の 1 時間が過ぎ，どうやら火山灰の影響もなく日本へ帰れることが確定すると，急におなかがすいてきたので先ほど配られたクラッカーの 1 枚 1 枚を大切に食べた．よほど美味しそうに食べていたのだろう，スタッフが同情するように私を見てほほ笑んでくれた．そして眠くもならずお喋りしているうち成田に着いた．シートベルトをはずすのももどかしく，速足で進み，入国審査場に駆けこみ，ゲートを通過するや否や二人は携帯電話を取り出し，教務課に連絡を入れた．「成田に今戻りましたので休講にしないでください」．そして「それじゃ，また」と短く別れ，急ぐ彼女を見送り，私は成田で軽食とコーヒーをお腹にいれた．これから家に帰ると，リビングのテーブルには郵便物の山，そして洗濯物の山，が待っているからだ．母に休息は無い．明日，学生に何を話そうか．気持ちのベクトルは既に明日の講義に向いている．ロンドンで一時はどうなることやらと思ったが，こうして元気に戻ってこられた．家族も学生も同僚の先生方や大学の事務の人も待っていてくれる．待っていてくれる人がいるのは本当に嬉しい．非常に慌ただしい幕開けになったが，2010 年度の講義の輝かしいスタートだ．2010 年の講義も頑張るぞ，前進あるのみだ．

　これで，2010 年のロンドンから飛べなかった顛末はおしまいです．

　さて，ANOVA の話を続けよう．前回の 1 元配置 ANOVA では，影響を与える要因は 1 種類のみであった．しかし，体内の悪い物質の量を減らす薬として A,B,C を投与する際に，その効果を高める別の促進剤，X,Y を投与するというように要因が 2 種類という場合がよくある．また，薬 A,B,C の効果を時系列に調べて，1 時間後，2 時間後を観測するという時間変化という別の要因がある場合もある．2 つの要因による 3 つ以上のグループの母平均の比較を行う分析が 2 元配置 ANOVA である．

　例：空気中の有害物質 X を除去する薬 FreshAir を開発したとしよう．その効果は，（1）温度，（2）湿度の影響をどのように受けるか実験をした．温度は，15 度，20 度，25 度の 3 水準とし，湿度は 50%，70%の 2 水準とした．初め有害物質 X の量を，普段の生活水準に設定しておき FreshAir の効

果による物質 X の減少量を測定した．ひとつの組合せに対して 2 回実験した(繰り返し数＝２)．以下に観測値を示す．温度と湿度の影響には交互作用があるか有意水準５％で調べよ．

	50%	70%
15度	16	13
	17	14
20度	18	16
	19	17
25度	22	15
	23	16

2 元配置 ANOVA 繰り返し有りの分析では，交互作用が有意であるかも検定するので，全部で 3 種類の帰無仮説を立てる．対立仮説も 3 つになるが，以下では省略する．観測値は以下の式で表わされる． $\boldsymbol{X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}}$

μ は母平均のベースで，α は温度の影響(主効果)，β は湿度の影響，αβ は交互作用である．ε は誤差項であり，ホワイトノイズのように正規分布に従う．添え字 i は温度の 3 水準，添え字 j は湿度の 2 水準，k は繰り返し数 2 を上限とする．

(帰無仮説 1)温度と湿度の交互作用はない($\boldsymbol{any\ \alpha\beta_{ij} = 0}$)

(帰無仮説 2)温度の主効果はない($\boldsymbol{any\ \alpha_i = 0}$)

(帰無仮説 3)湿度の主効果はない($\boldsymbol{any\ \beta_j \ = 0}$)

ともかく，EXCEL でまず分析してみよう．EXCEL を見ると，繰り返しのある二元配置と，繰り返しのない二元配置，がある．この例は繰り返し数が 2 であるので，繰り返しのある二元配置を選ぶ．実行結果を以下に示す．

分散分析表						
変動要因	変動	自由度	分散	観測された分散比	P-値	F 境界値
温度	32.66667	2	16.33333	32.66667	0.000595	5.143253
湿度	48	1	48	96	6.51E-05	5.987378
交互作用	14	2	7	14	0.005496	5.143253
繰り返し誤差	3	6	0.5			
合計	97.66667	11				

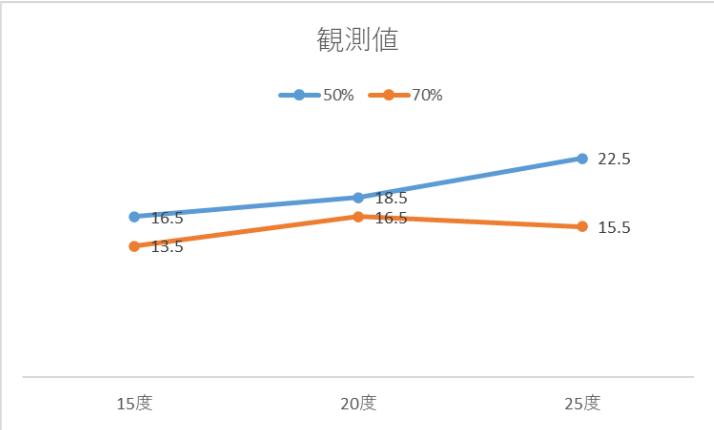
温度に関する分散は約 32，湿度に関する分散は 48，交互作用の分散は 7 で，誤差の分散は 0.5 であることが読み取れる．検定では，「誤差の分散に比較して各分散値は十分大きいか」を調べたい．各 F 値は，誤差分散値の 0.5 で割って求める．観測された分散比 3 つの値を各自，暗算で確認せよ．使う F 分布は，温度の影響が F(2,6)，湿度の影響が F(1,6)，交互作用が F(2,6)となる．2 つ目のパラメータは誤差の自由度 6 である．

最初に交互作用の P 値 0.005 を見る．有意水準を 5%とすると，帰無仮説は棄却される．交互作用は存在すると結論できる．

交互作用がある場合は多重比較によるグループ間比較が可能となる．池田郁男先生はこういう時の表現として「**交互作用が有意であったため，全群の多重比較を行ったところ,...**」という表現が適切と述べている[1].

$\boldsymbol{X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}}$ の式をもう一度見よう．どこかの$\boldsymbol{\alpha\beta_{ij}}$が 0 ではないとき，それは$\boldsymbol{\alpha_i}$や$\boldsymbol{\beta_j}$にも影響を及ぼすので，$\boldsymbol{\alpha_i}$や$\boldsymbol{\beta_j}$ の影響について検定をしても，それは参考程度となってしまう．

観測値のグラフを描いて交互作用を見てみよう．



左図は各セルの２つの観測値の平均を求め，プロットした．湿度５０％の場合は，温度が正に効いているが，湿度７０％の場合，25 度のとき，相殺効果が起こっている．よって，この事例では，温度の主効果あり，とは言えない．また，湿度の主効果あり，とも明言できない．

ところで，2 次元配列 ANOVA には，繰り返しのない手法もあった．繰り返しのない 2 次元配列 ANOVA は，予め知見として「交互作用がない」ことが分かっている場合にしか使えない．繰り返しのない 1 回だけの観測だったから，何も考えず，繰り返しのない 2 元配置 ANOVA を使うのではなく，「交互作用がない」と条件が満たされているか注意しよう．交互作用には，相殺作用，相加作用，相乗作用がある．

この例に戻ろう．交互作用が有意にあったので，次は全群の多重比較に進む．ここでは多重比較法の代表的な手法，Tukey（チューキー）法と Bonferroni(ボンフェローニ)法を Mathematica で行った．有意水準１％にしたとき，以下の群間で有意差があった．略号を使ったが，1570 は 15 度 70%の群を示す．

"Model" → Tukey　{{1570,2050},{1550,2550},{1570,2550},{2050,2550},{2070,2550},{2550,2570}

"Model" → Bonferroni　{{1570,2050},{1550,2550},{1570,2550},{2070,2550},{2550,2570}}

Tukey 法で 6 個有意差のあるペアが見つかった．Bonferroni 法では 5 個の有意差のあるペアが見つかった．全群比較は 6 C2 個の組合せなので，15 個の比較がなされる．そのうち，上記の 6 個と 5 個のペアが有意差あり，と検定された．例えば，{1570,2050}　は 70%15 度の 13.5 は 50%20 度 18.5 と有意差がある，と解釈する．多重比較は，単純に差を見ているのではなく，分布を補正したり複雑な計算をしてこの結果を得ている．

終わり

[1] 池田郁男：「改定増補版：統計検定を理解せずに使っている人のために III」，公益社団法人日本農芸化学会，2019 月 10 月 1 日，https://katosei.jsbba.or.jp/view_html.php?aid=1208　（この解説論文は重要な点が簡潔に書いてある）

引用元：卯の花をかざしに関の晴れ着かな　　曾良