渡りかけて行間のぞく流れかな　<ラグランジェ未定乗数法>

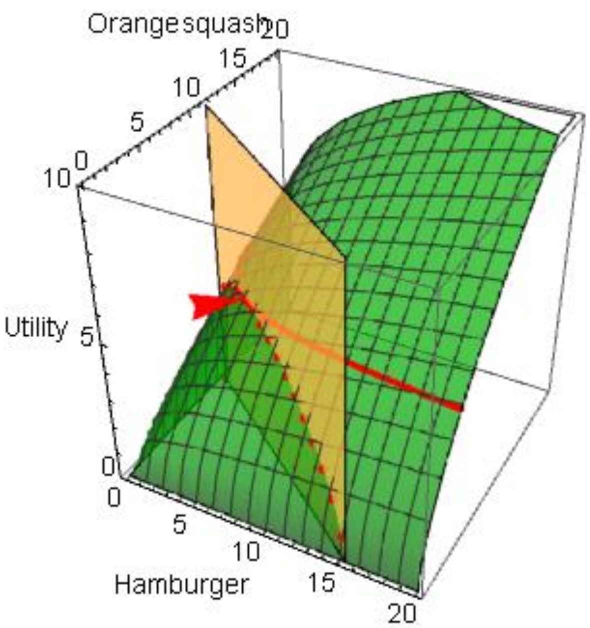
2020年9月下旬 白田由香利

講義の中で最も頻繁に話しているグラフィクスは何だろうか，と考える．やはり，ラグランジェの未定乗数法のグラフィクスだろう．

文章題：3000円の所持金がある．150円のハンバーガーと180円のオレンジジュースを食べて満足度を高めたい．満足度を最大とするときのハンバーガーの個数xとジュースの個数yを求めよ．但し，満足度は，

$$u = x^{0.6} \times y^{0.2}$$

経済では，満足度や効果などを一般的にユーティリティー(効用)と呼ぶ，効用を最大化したいのだけれども，そこには予算制約(この例では 3000 円)がある．という問題で，制約付き最適化問題と呼ばれる．



上記のユーティリティーを3次元で表すと，図の緑の曲面となる．多く食べれば食べるほど満足度は高くなる，という増加関数である．x軸は買うことができた(そして，食べた)ハンバーガーの個数，y軸はジュースの個数である．もし予算制約がないのであれば，最大値は天井無しで上がっていく．しかし，所持金は3000円しかない．その3000円という制約を図中で示すと黄色の平面となる．制約式は以下のように書ける．

$$150 \times x + 180 \times y = 3000$$

$$y = \frac{150}{180}x + \frac{3000}{180}$$

変数yについて解くと，xの一次式となるので，x-y平面上で直線となる．それを3次元空間にもってくると，z方向に延びて，黄色い平面となる．この直線が3次元で平面になるイメージは，マジンガーZが格納庫からせり上がってくる，あるいは，鋼の錬金術師で主人公たちが「防御」と壁を出現させるようなイメージである．

この予算制約下で，満足度最大の点はどこか？　という問いであった．つまり，制約式 $y = \frac{150}{180}x + \frac{3000}{180}$ と　$u = x^{0.6} \times y^{0.2}$　を同時に満たす点のうち，満足度最大の点はどこか？　と変形できる．

黄色の下敷きで，緑のドームを切断してみよう．

そのインターセクション(交差曲線)は，放物線のような，上がって最大点となり，その後さがっていく曲線となる．図中，矢印で指し示した点が最大値である．講義のときは，「黄色い下敷きでバサッと切ってみましょう」と言って，手刀でエアー切りをする．この動画があるので，興味のあるかたは参照して頂きたい(https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/Indonesia/photo2019Feb/LINE_MOVIE.mp4)

この動画の撮影は 2019 年 2 月 27 日，インドネシア国立大学，経済学部で行われたゲスト講演 "Visualization in the Field of Economics and Mathematics"のものである．聴衆は，経済学部の先生がたの

みで，イスラム金融の講師の先生や，元大臣の先生もいらっしゃった．私のサイト Mathematical Exchange between Indonesia University and Us（https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/Indonesia/） には，インドネシアの研究者の皆様とも交流の記録写真も豊富なので興味があれば参照して頂きたい．この動画を撮影して，講義中から同僚の先生がたに配信してくださったかたも，経済学部教授(女性)で，このかたのお姉様は現職のインドネシア財務大臣で元ここの経済学部教授をなさっていた．こうした著名な先生方を前に，自分の可視化教材の効果を力説していた私の緊張のレベルはいかばかりかと，ご推察頂けると思う．

その質疑応答のとき，経済学科長テグー先生が，「そのグラフィクスに等効用線も加えてくれませんか」と私にリクエストをお出しになった．等効用線とは，同じ効用が得られる財の組み合わせを結んだ曲線である．上図では，赤の等高線がそれである．等効用線の中で，最も安価に同じ効用が得られる点が，矢印でしめされている点である．同じ満足度を得られるのであれば，安いにこしたことはない．

「え，ここでプログラムをしろということですか？」．学科長は「できるでしょ」と笑顔で首をかしげている．仕方ない，ここでプログラムを始めるしかない．深呼吸をひとつして，Mathematica を開く．一瞬にして，周囲の声は耳に入らない状態になる，視界の端に聴衆が見えてはいるが，全く気にならなくなる．見えているのはエディターの画面だけである．気合を入れて頭の中に，このプログラムの構造をもってくる．これが最もメンタルパワーを必要とする時である．「ここと ここの行間に，最大値の点の高さで等高線をひくコマンドを入れる」．行間に精神が集中し，キーボードからマシンガンのようにコマンドが入力される．

私にとっては寿命が 10 年縮むような恐怖の体験ではあるが，プログラムを組むというリアルなようすをデモンストレーションできたことは，諸先生方にとっても今後の学生への教材作成を考える上で何かしらの益はあったのではないかと考える．

その晩，日本食レストランで，友人のインドネシア国立大学工学部教授リリー先生(女性)が慰労会を開いてくれた．おごって頂いた和牛ステーキが美味しかった．

終わり

＊このグラフィクスの描き方（Mathematica プログラム）はこちら（https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/MATHEMATICA/mathematicaFEBUItextbook/）

＊ リリー教授との交流についてはこちら
（https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/Indonesia/ProfRiriEssay/ProfRiriEssay.pdf）

引用元：渡りかけて藻の花のぞく流れかな　　　凡兆

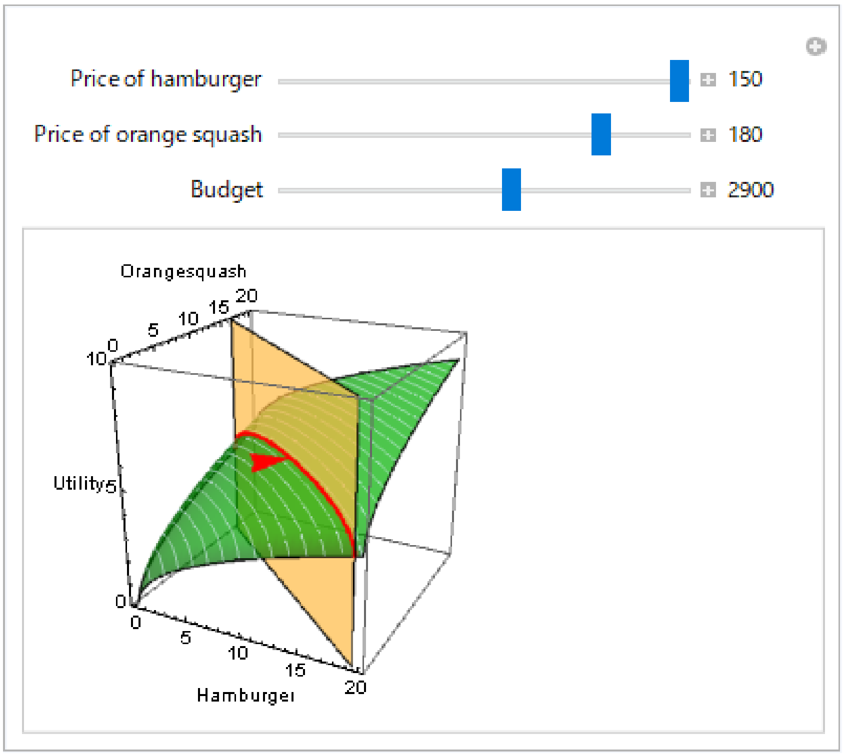
ラグランジェ垂線付き合ふ軒の下　<ラグランジェ未定乗数法>

2020 年 9 月下旬　　白田由香利

予算制約の下での満足度最大化問題を続ける．図では，ユーティリティー関数を

$$u = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

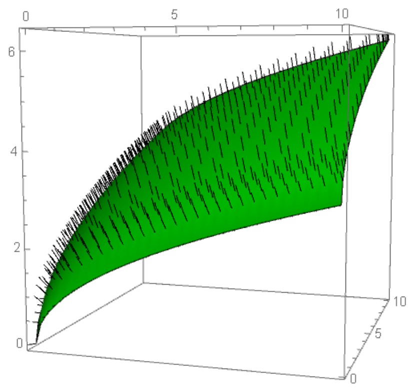
に変えてある．x は買うことのできたハンバーガーの個数，y はジュースの個数である．「私の満足度関数はもっと急激に増加する」と思われる諸兄は，$x \times y$ など実状に合うように関数を選べばよい．



制約付き最適化問題は，ラグランジェの未定乗数法という手法で解くことができる．ラグランジェ未定乗数法において，抑えておくべき重要概念は，ラグランジェの未定乗数λ(ラムダ)と言える．このλというのは，この文章題においては，予算額をあと 1 円増やした場合どの程度満足度が増加しますか，という近似値を表している．制約式において予算金額を M 円という変数に置き換える．

$$150 \times x + 180 \times y = M$$

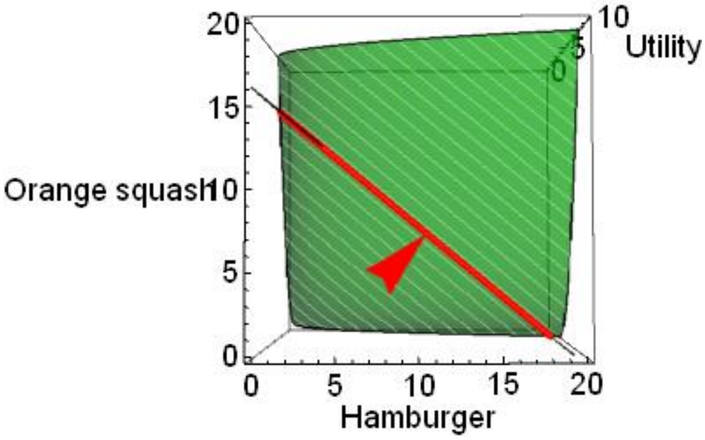
この M を 3000 円から 3001 円に増加させた場合，黄色平面は若干後方にシフトし，矢印で示した最大値の位置は，上方に若干移動する．その際のユーティリティーの増加分がλである．λは偏微分で $\lambda = \dfrac{\partial u}{\partial M}$ と定義される．



1000 円から 1001 円に予算を増加したときのλの増分と，3000 円から 3001 円に増加したときのλの増分は異なる．それは右図からも分かる．緑色のユーティリティー曲面の勾配は場所によって異なっているからである．右図では曲面の各点で法線ベクトル(毛のような線)を描いた．そのベクトルの根本の点の周辺の小さい曲面に対して垂直となる方向が，法線ベクトルの方向である．こうして，曲面に毛をはやしてみると，ユーティリティーが小さい方が，勾配が急であることが分かる．

つまり，ユーティリティーが小さい方がλは大きい．

次に視覚的に最大値の位置での x と y の値を求める方法を示す．視点を変えて，矢印の位置を覚えておき，x-y 平面にその位置をプロジェクション・マッピング(投影)する(下図参照)．2 階から軒下を見下ろすからのごとく，x-y 平面を見下ろすのである．そして，矢印の示す点から，x 軸と y 軸に垂線を垂らす．この図では，ハンバーガーは約 10 個，ジュースは約 8 個という解が求まる．



正確な分数値を求めたいときは，もちろんラグランジェの未定乗数によって偏微分をしていかねばならないが，求めたい解の意味を理解するには，こうした視覚的解説が分かりやすい．

私の経営数学 1 の講義でも，ラグランジェの未定乗数法は期末最後の難関となる．毎年のように学生から言われることは「一度理解しても，ラグランジェ未定乗数法で計算しているうちに何をやっているのか分からなくなってしまうのですが，丁度いいタイミングで，再び先生が可視化教材で説明してくれるので，何を求めようとしているのかを思い出せます」．

このグラフィクス教材も Mathematica で作成し，web に掲載してあるので，フリーソフトの Wolfram CDF プレーヤーさえインストールすれば，誰でも家庭で動かせる．しかし，このインストールが面倒なようである．そこで，数年前から，インストールも不要，かつ自分がスライダーなどを動かさなくても自動で動いてくれるように，GIF アニメ化してしまった(https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570 で動いている)．この GIF アニメを見ていると，予算金額 M がドンドン増加していく．そして，ユーティリティーも一緒に増加していく様子が見られる．黄色い下敷きのような制約条件がズンズンと後方に進んでいくさまを見るのは非常に面白い．

終わり

引用元：　旅枕鹿の付き合ふ軒の下　　千里

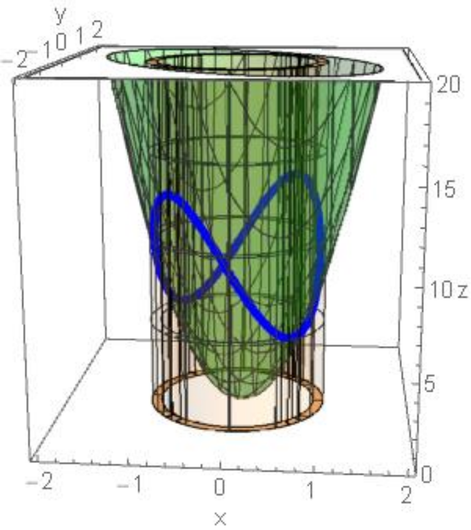
偏微分　落つるよりとぶ蛍かな　　<ラグランジェ未定乗数法>

2020 年 9 月下旬　　白田由香利

ラグランジェの未定乗数法の制約式として円の公式を使った例をみてみよう．

$$x^2 + y^2 = 1$$

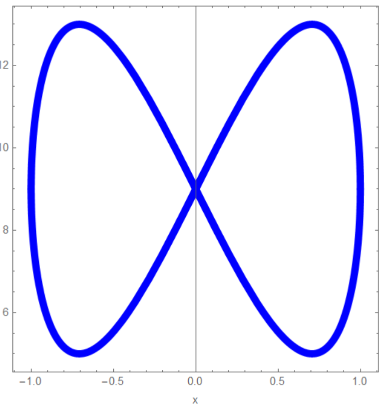
上記の円の公式は x-y 平面上での円を定義している．さて，x-y-z の 3 次元空間で，この円の式はどのような形状になるか？　答えは，以下の図にあるピンクの筒状(シリンダー型，茶筒型)である．2 次元の円が 3 次元空間で，z 軸に沿って移動していく．その移動履歴は筒状となる．



文章題：　制約　$x^2 + y^2 = 1$　の下で，以下の z が最大となる点を求めよ．

$$z = 9x^2 + 9y^2 + 8x \times y$$

このｚ曲面は図中，緑の曲面で示した．縄文式土器のような形状である．先がとがっている．この緑の曲面と，ピンクの筒状のインターセクション部を求める．それは，青い曲線のような不思議な形をとる．蛍が無限大記号∞のような 3 次元曲面のジェット・コースターに乗り込んだとする．キャー(絶叫)と落ちていくと思うと，再び上昇をして最高点に到達する．と思うや，また，キャーとばかりに落ちていく．その繰り返しである．この青の曲線を x-z 平面にプロジェクション・マッピングすると，以下の図にあるような曲線となる．ｚの最大値は 2 か所，ｚの最小値も 2 か所ある．



はじめにこのインターセクションの曲面を描いた時期は 2007 年ごろに遡る．グラフィクスで描かなくとも，ラグランジェ未定乗数法を使えば，ｚの最大値も計算できる．それが 2 か所にあることも計算できる．しかし，このように可視化すると，イメージが鮮明になり，よく分かる．3 次元グラフィクスを，くるくる視点を変えて眺めると，お盆の回り灯篭のようで視覚的に楽しい．

こうしたインターセクションの詳細が可視化できるようになったことは，コンピュータ・グラフィクス技術の発達のおかげである．昔の人は頭のなかでイメージはできても，詳細なところまでは見えていなかったのではないだろうか．それが，誰でもが買える程度の安価な PC の上で描画可能となった．今まで見たくても見ることができなかったものが可視化できるようになった．

私の場合，自分が見たいからプログラムして可視化する．見て楽しんで，他の人にも見せてあげたいので講義用グラフィクス教材にして web で公開する．自分がしていることはその繰り返しだ．

2001 年宇宙の旅の映画の中で，類人猿が石器を発明して進化していくという象徴的なシーンがあったが，数学教育において Mathematica などの数学ツールはその石器に相当する画期的ツールである．サルに石器，白田に Mathematica．数学ツールを活用して分かりやすい数学教材を作るということが自分の

ミッションのように感じてきた．20 年に渡ってグラフィクス教材を作り続けていたら，情報処理学科のフェローという栄誉まで頂けた．私にとって身に余る光栄である．受賞対象業績は「データ工学と数理科学を中心とした教育への貢献」(https://www.ipsj.or.jp/annai/aboutipsj/fellow/shirota_y.html).

大学 1 年のときにマイコン時代が到来して，面白さに夢中になり，果てはコンピュータ・サイエンスの研究者になったことも，マイコンとの遭遇のおかげである．そして，経済学部の教員となり，今，自分の表現手段として数学ツールに出会えたことで人生ががぜん面白いものになった．数式を描いてみて，その形状を讃美する．ただそれだけで幸せ，で感謝である．

引用元：草の葉を落つるよりとぶ蛍かな　　芭蕉

＊ラグランジェの未定乗数法の公式を学ぶのであれば，白田由香利：「悩める学生のための経済・経営数学入門 —3 つの解法テクニックで数学アレルギーを克服!」，共立出版，2009 年.
＊私のマイコンとの遭遇については，白田由香利：「素晴らしいマイコンの世界」，電波新聞社，1981 年，を参照して頂きたい. 本書の中で, 歴史的価値のあるものは, 当時の秋葉原マップだと考える. そこには, 秋月電子通商もある，ラジオ会館もある．本マップやイラストを描いてくださった，当時 TSG の先輩であった島田啓一郎氏に改めて感謝する．

あら何ともなや　期末は過ぎてラグランジェ　<ラグランジェ未定乗数法>

2020 年 10 月上旬 白田由香利

　コロナのロックダウン中の，私にとって期末試験期最大のイベント，経営数学 1 の試験が 7 月 31 日，無事終了し，安堵した．経営数学 1 の遠隔講義は ZOOM でリアルタイム配信により行っている．学習院大経済学部は遠隔講義のシステムとして主に manaba（まなば）を用いているので，教材配布及びレポート提出，小テスト等はこの manaba で行なっている．さて，期末試験実施で問題となることは，学生の皆様が一斉に manaba にアクセスするとシステムが落ちる(システムダウン)する可能性が高まることである．一般にクラウドシステムでアクセスが集中すると，コンピュータ処理が追い付かなくなり，システムダウンに至る．コロナ禍のロックダウン状態での遠隔講義では，どの大学のシステムでも通常とは桁違いのアクセス数があるわけなので，システムダウンの可能性は高まる．うちの大学のシステムは元気に動いていた方だと思う．それならば，コンピュータの設備をあげて処理能力を高めればよいのだが，それは施設コストの増加に直結するので，経営者の視点から見ると，様子を見ながら設備投資を臨機応変に増設する必要がある．過剰な設備投資は適切な行為とは言えない．

　期末試験の問題点は，90 分の間に回答をさせると，システムへの書込み数が集中的に増加することである．これは避けたい．結局，考えあぐねた結果，以下のような形式で行った．試験時間の９０分間に，ZOOM で試験問題の映像を送る．２０分経過ごとに，試験問題 1 ページを見せる．この間は，ZOOM を使っているだけなので，manaba には負荷はかからない．学生の皆さんは，机の前でディスプレイに映る問題を見て，ノートに問題を解く．解答はセンター方式のように，1 択式にしてある．この解答を夜 8 時から翌朝 9 時の間に，manaba から入力する．まず，選択式で正しいと思う番号を選択する．それだけでは，本当に解いたのか否か分からないので，途中経過も見る必要がある．そのため学生の皆様には，ノートに手書きで解いた計算過程を携帯電話で写真に撮って，レポートとして提出して頂く．これも manaba で入力する．最低 4 枚の写真の画像ファイルを manaba に書き込むことになるので，この負荷はシステムにとって大きい．一晩時間があるので，負荷分散になる．

　不正防止のため，問題ごとに手書きの自筆を入れなくてはいけない，こととした．これによって，カンニングを減らせることができると考える．学生の皆さんの中には一晩中，問題と悪戦苦闘して解答を得，夜中や明け方に疲労困憊して manaba への投稿を完了させた人もいるかと思う．この方式を取れば，少なくとも９０分のシステムへの集中を 13 時間に分散させることができる．

　試験問題を ZOOM 配信しているときの私の心配は，家の WiFi がトラブルを起こさないか，私の PC が急に Windows アップデートを起こしたりしないか，等々，気にしたら際限がない．あれこれ心配して，期末の時間が何事もなく完了したときは，心底ほっとした．

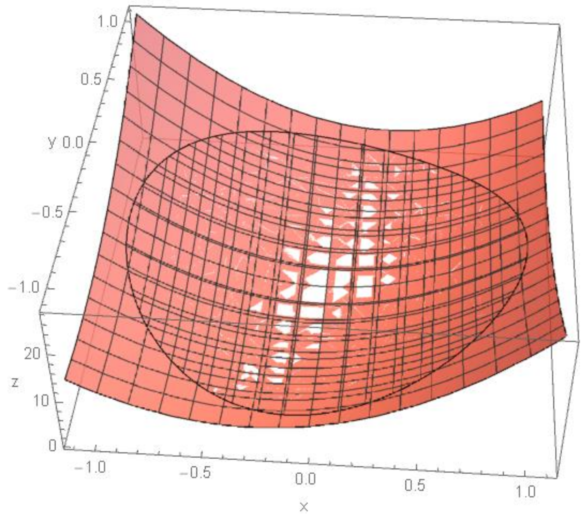
　今年度の経営数学 1 の期末試験は，考える時間が 14 時間以上あるので，少し難し目にした．ラグランジェの未定乗数法の問題はいつも 1 題のところ，2 題出題した．

―――

問題 5

制約 $x^2+y^2=1$ のもとで，$C=12x^2-6xy+5y^2$ の最大値となる点の x と y の値を求めよ．但し x＞0 とする．（ヒント： x の 2 次方程式の解の公式）

Ans. $x \cong 0.93\square 89$,　$y \cong -0.346\square 5$



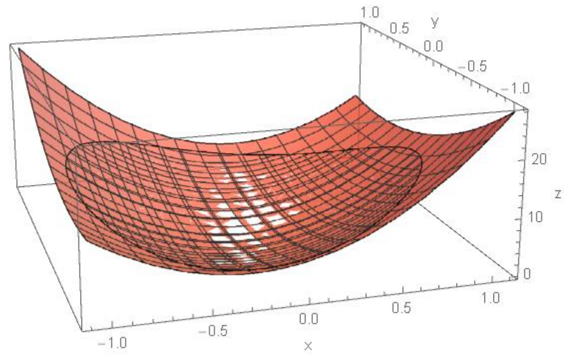


図２枚はヒントである．関数 C の曲面と制約式のシリンダー（茶筒型）のインターセクションの曲線を描いた．最大値となる点は２点あるのだが，問題では x は正と指定があるので，答えは１個となる．

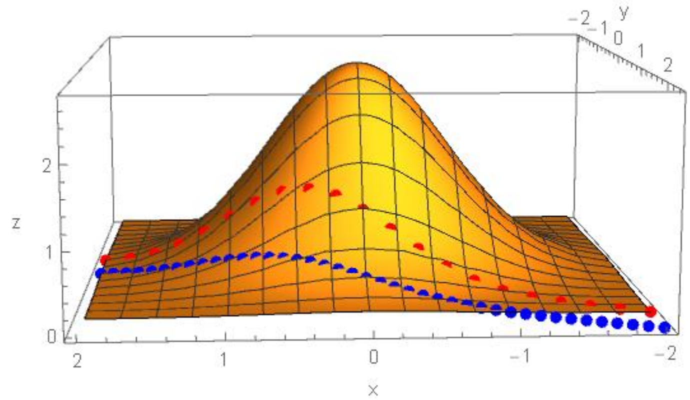
次の１題はもう少し難しい．

問題６

制約 x+2y=2 のもとで，

$u = e^{1-x^2-y^2}$ の最大値を求める．制約式の＝２を３に増加させたとき，u の最大値はどの位減少するか近似的に求めよ．

Ans. 減少量 0.□77



この問題文にもヒントの図を入れた．

図中，小山型の曲面が関数 u であり，x+2y=2 とのインターセクションは赤，x+2y=3 とのインターセクションは青の曲線である．赤の曲線を指で辿ると，x=0.4, y=0.8 のところで，u=1.22 の最大値をとる．この時のラグランジェ未定乗数 λ の値が−0.977なので，制約式を x+2y=3 に変えたとき，「u の最大値はどれだけ減少するか」の答えは，近似的に 0.977 であることが分かる．

最大点でのラグランジェの未定乗数の値は，制約式の定数を 1 だけ増加させたときの変化分を近似的に表している．このことを活用すれば，わざわざ青線の最大点を求めなくとも，解が求まる．

引用：あら何ともなやきのふは過ぎて河豚汁　（芭蕉）