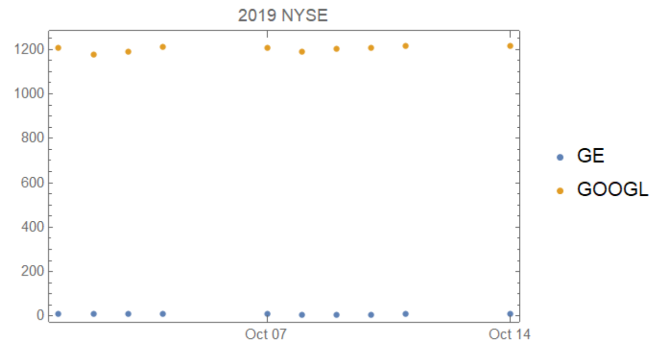
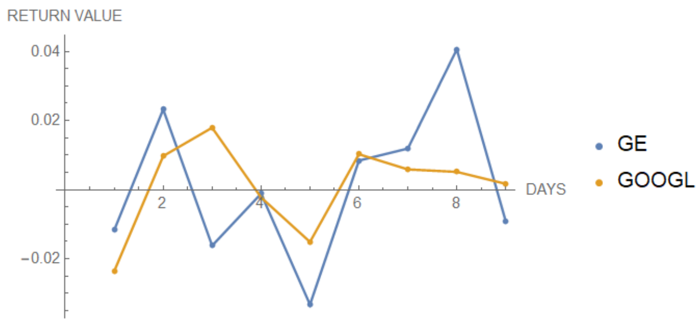
此の秋はシャープレイシオ雲に鳥　　＜シャープレシオ＞

2020 年 10 月中旬　白田由香利

シャープレシオの話をしようと，効率的フロンティアの曲線を描いていたら，雁の編隊を思い出した．オックスフォードで暮らしていた 2006 の秋は，鳴き渡る雁の群れも珍しいものではなかった．日曜の午後に 30 分ほど歩いたところにあるウォルバコートの村の公民館にパントを見に行った．パントとは地元の素人の人が演じる子供向きの演劇で，例えば，長靴をはいた猫のようなお話を演目とする．パントのお約束としては，中高年の男性がひとりは女装をして女性役を演じる，そして，主役の青年役は若い女性が演じる，等がある．村の公民館で集まってパントを見るという，いかにもイギリス的雰囲気は，アガサ・クリスティーの描くミス・マープルの住むセントメアリミード村そのものである．村の住人が公民館や教会に集まって，バザーの準備や日曜礼拝を行う．オックスフォードでも，この昔ながらの風習が残っていることが面白い．パントのストーリーは基本コメディで，笑う場面が満載であるが，私の語学力と知識ではどうして可笑しいのか分からないことが多いのが，もどかしい．Ma 先生が一緒にいてくれたら，「何でも説明してくれるのに」と思いつつ公民館を後にする．Ma 先生とは，超名門ドラゴンスクールの先生で私の友人である．Ma 先生には滞在中，本当にお世話になった．鳥の鳴き声に，空を見上げると，雲が浮かび，雁が群れになって渡っていく．同じ雁の群れを見ても，日本の秋のような物のあわれは感じない．力強く羽ばたいているなぁ，としか感じない．カラッとクリスピーな空気感の違いかもしれない．楽器の音の共鳴も空気の違いで全く違う．



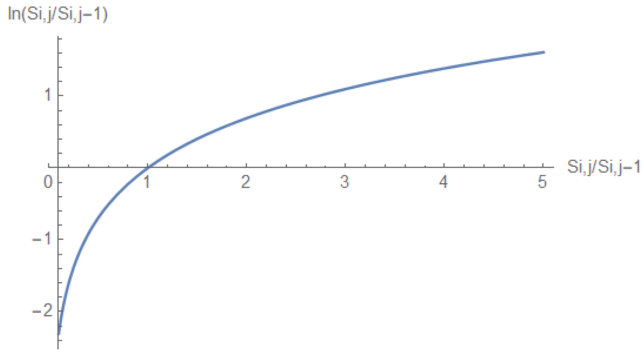




2 社の株を使ってポートフォリオを作ってみる．データとして 2019 年 10 月の GE とグーグルの株の 10 日分の終値を用いる．上左図には生の株価データを表示してある．グーグルの株価の方がはるかに高いことが見て取れる．2 社の株価のリターン値を上右図に示した．リターン値の定義は，「本日の株価の前日比に対して，その自然対数を取った値」とする．第 i 番目の会社の j 日目のリターンの定義式は以下のようになる．自然対数は ln (natural logarithm)と書く．S は株価である．

$$G_{i,j} = \ln\left(\frac{S_{i,j}}{S_{i,j-1}}\right)$$

リターンの定義はいろいろ考えられるが，この定義が広く使われている．

対数 ln(x)は，x が 1 以上であると，0 以上となる．そのグラフを右に示す．前日よりも株価が上昇すると，前日比は 1 以上になるので，リターン値は 0 以上となる．反対に，前日の価格を下回れば，リ



ターン値は 0 以下となる．リターン値が正になったということは，前日よりも価格が上昇したことを意味する．10 日の株価から，9 日分のリターン値ができる．

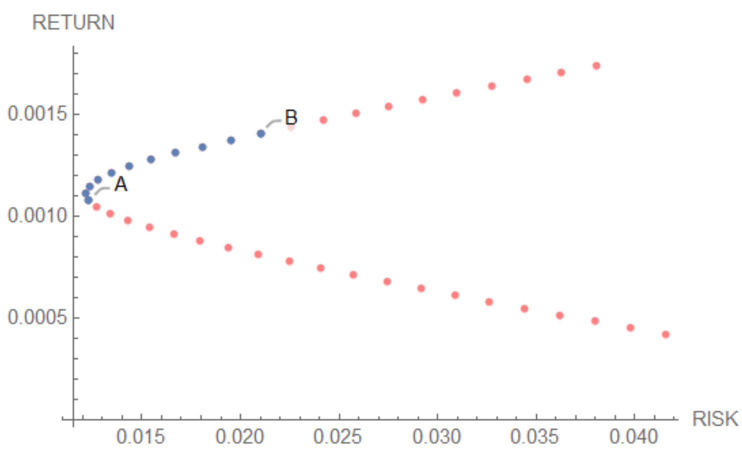
```
{-0.02355888978892237` (1 - tt) - 0.011682309083839033` tt,
 0.0097240374144783` (1 - tt) + 0.023229825763171466` tt,
 0.017939155284157307` (1 - tt) - 0.016204098244175114` tt,
 -0.0022403694716506394` (1 - tt) - 0.0011674578256196677` tt,
 -0.01511048278604203` (1 - tt) - 0.03325730302698025` tt,
 0.010257030804056277` (1 - tt) + 0.008418648400448541` tt,
 0.005862643138488234` (1 - tt) + 0.011904834249148765` tt,
 0.0051460132283719815` (1 - tt) + 0.0405853243616678` tt,
 0.001693097212546727` (1 - tt) - 0.009132474615119266` tt}
```

GE の株とグーグルの株の 2 銘柄でポートフォリオを作ってみる．2 銘柄のブレンド比を **tt: (1-tt)** とするとする．例えば，0.3 : 0.7 である．9 日分のリターン値から，右のように 9 個の式ができる．リターンの 9 日間の平均は $\frac{1}{9}(0.00971224\,(1-tt)+0.012695\,tt)$ となる．普通，媒介変数が t を使うが，媒介変数の位置が目立つように tt とした．

同様にリターン値の標準偏差を計算する．金融数学では標準偏差をリスクと定義する．リターン値の分散は，各リターン値からリターン平均を引いた偏差，の平方和をデータ数で割ったものである．媒介変数 tt の式で書くと左図のようになる．長い式である．この式のルートを取れば，標準偏差となる．

$$
\begin{aligned}
\Bigg(&\left(-0.0151105\,(1-tt)+\tfrac{1}{9}(-0.00971224\,(1-tt)-0.012695\,tt)-0.0332573\,tt\right)^2+\\
&\left(0.0179392\,(1-tt)+\tfrac{1}{9}(-0.00971224\,(1-tt)-0.012695\,tt)-0.0162041\,tt\right)^2+\\
&\left(-0.0235589\,(1-tt)+\tfrac{1}{9}(-0.00971224\,(1-tt)-0.012695\,tt)-0.0116823\,tt\right)^2+\\
&\left(0.0016931\,(1-tt)+\tfrac{1}{9}(-0.00971224\,(1-tt)-0.012695\,tt)-0.00913247\,tt\right)^2+\\
&\left(-0.00224037\,(1-tt)+\tfrac{1}{9}(-0.00971224\,(1-tt)-0.012695\,tt)-0.00116746\,tt\right)^2+\\
&\left(0.010257\,(1-tt)+\tfrac{1}{9}(-0.00971224\,(1-tt)-0.012695\,tt)+0.00841865\,tt\right)^2+\\
&\left(0.00586264\,(1-tt)+\tfrac{1}{9}(-0.00971224\,(1-tt)-0.012695\,tt)+0.0119048\,tt\right)^2+\\
&\left(0.00972404\,(1-tt)+\tfrac{1}{9}(-0.00971224\,(1-tt)-0.012695\,tt)+0.0232298\,tt\right)^2+\\
&\left(0.00514601\,(1-tt)+\tfrac{1}{9}(-0.00971224\,(1-tt)-0.012695\,tt)+0.0405853\,tt\right)^2\Bigg)
\end{aligned}
$$

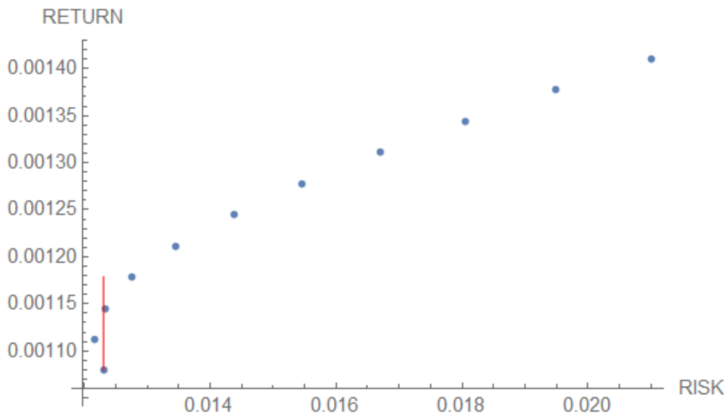
9 日分のリターン値の平均値とリスクが媒介変数 tt の式で表現できた．この媒介変数 tt を 0 から 1 まで動かす．増分を 0.1 とすると，11 個の値が計算できる．増分 0.01 とすると，101 個の値の計算ができる．




左図に，このカーブを描いた．横軸がリスク，縦軸がリターンの平均値である．図で青い 11 個の点が，tt が 0 から 1 まで 0.1 刻みで動いたときのカーブである．ラベル”A”は，tt=1，ラベル”B”は tt=0 のときのポートフォリオの状況を示している．**媒介変数 tt は 0 から 1 の間である**，という制約条件がある．そうでないと，2 銘柄をブレンドしてポートフォリオを作ることができなくなるので，現実にはブレンド比率がマイナスになることはない．しかし，数学的に，tt 及び(1-tt)が負の値を取る範囲まで描画すると，図のようにピンクのカーブとなる．

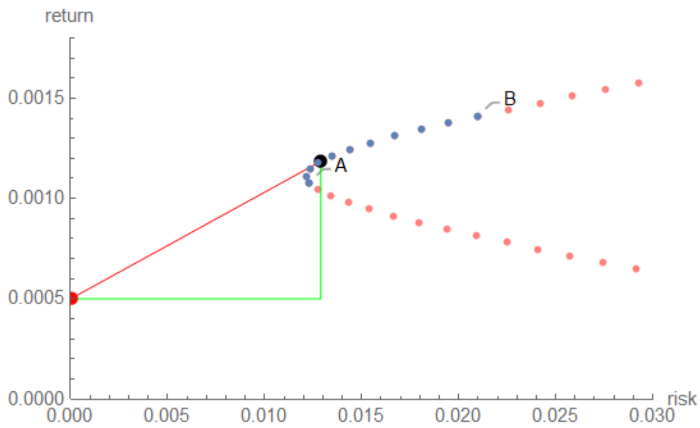
点 A と点 B を結ぶカーブの中で，リスクが最小の点は，点 A の左上の点 tt=0.9 の点である．雁の群れの先頭のところである．この先頭の点から点 B までの上側のカーブを**効率的フロンティア**と呼ぶ．そ

れは，同じリスクに対して 2 つの選択肢がある場合，リターン値の平均が大きい方を取るに決まっているからである．下の図の赤い線を見て頂きたい．点 A を取るよりも，同じリスクで，高いリターン値の点が存在することが分かる．




次はいよいよシャープレシオの話である．その定義は以下である．

$$\frac{\textit{リターンの平均値} \quad - \quad \textit{無リスク資産のリターン値}}{\textit{リスク}}$$




リスクが 0 の資産(例えば，国債)を，無リスク資産と呼ぶ．無リスク資産の存在なしでは，シャープレシオは考えられない．そのリターン値平均が0.0005とする．左図では，無リスク資産を赤丸で表した．

問題：

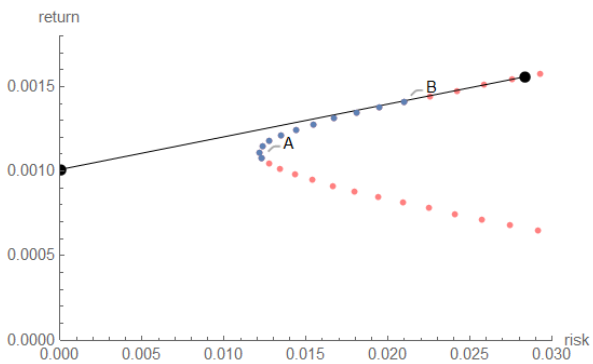
この無リスク資産に対して，シャープレシオが最大となる，ポートフォリオのブレンド比率 tt を求めよ．

これは最適化問題である．

図中，シャープレシオは，緑の 2 つの辺の比である．シャープレシオが最大となるのは，赤丸からカーブ AB へ引いた接線の接点のところである．代数学的に解くには，シャープレシオを媒介変数 tt を使って表し，その式を tt で微分して，その値が 0 に等しいとして，方程式を解く．この問題では，tt として，以下の 2 つの値が得られる．

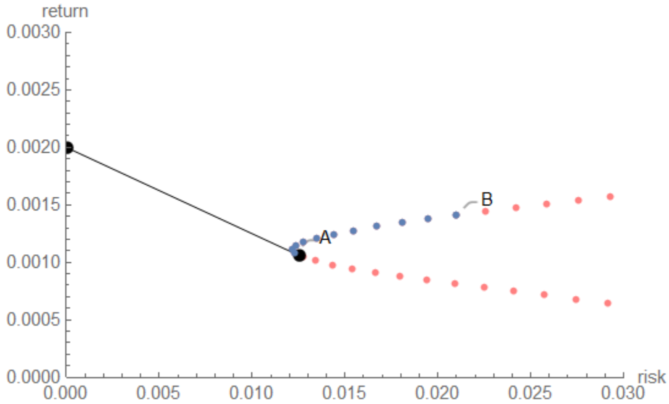
$$\{1.015 \times 10^{16}, \quad 0.320\}.$$

ポートフォリオの現実的解を与えるのは，後者の tt=0.32 のほうである．この点は上図中，黒い点で表した．接線の接点である．




無リスク資産のリターン値によっては，意味のある解が無い場合もある．左図は，無リスク資産の平均リターン値を0.00101　とした場合である．微分して 0，の方程式を解くと，tt は 1.4 となり，ピンクの領域に入ってしまい，現実的なポートフォリオが作れない．この場合は，無理にポートフォリオとせず，点 B の 100%グーグル株と，無リスク資産へ分散投資すればよい．

右の例では，明らかに無リスク資産の平均リターン値のほうがポートフォリオの平均リターン値よりも高い．この場合，ポートフォリオなどに投資せず，全部，無リスク資産にしたほうがよい．初めに，効率的フロンティアと無リスク資産の間の関係を確認しないで，何でもかんでも最適化問題として解いても，それは欲しい解でないかもしれない，という例である．




終わり

引用元：　此の秋は何で年よる雲に鳥　　芭蕉

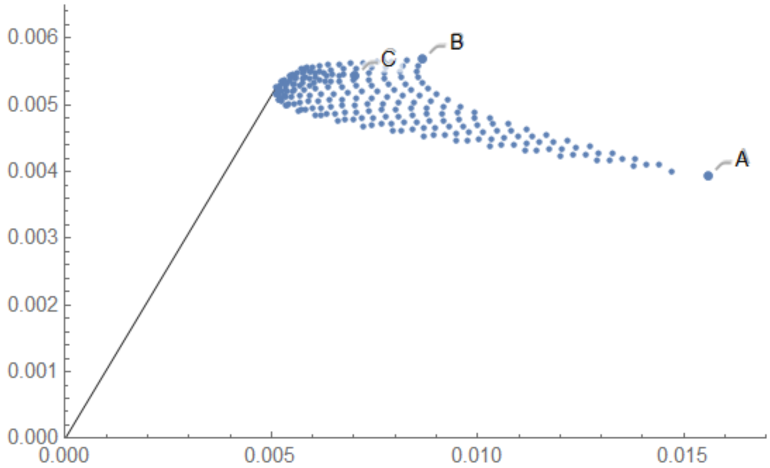
芭蕉野分してラグランジェに解を聞く夜かな　　＜シャープレシオ　ラグランジェの未定乗数法＞

2020 年 10 月中旬　白田由香利

3 種の銘柄でポートフォリオを作ってみる．それぞれのリターン値を returnA, returnB, returnC とする．ブレンド比の媒介変数を使って，ポートフォリオのリターン値を以下で表すとする．

$$t_A \times returnA + t_B \times returnB + t_C \times returnC$$

制約条件は $t_A + t_B + t_C = 1$ である．前回の 2 銘柄のポートフォリオでは，媒介変数は tt のひとつだけで表した．3 銘柄の場合も，媒介変数は 2 つだけで，最後の残りの比率は $1-(t_A+t_B)$ と表すこともできる．どちらでも，同じ解が得られる．しかし，今回は媒介変数を 3 つ使って解いていく．




まず，3 つの媒介変数を$t_A + t_B + t_C = 1$の制約条件の下，0 から 1 の間で動かす．刻みを 0.1 とした場合, 左図のような点集合が得られた．銘柄 A だけとすると，リスクが最大でリターン平均値が最小となることが分かる．

同じ高さ(リターン平均値)であれば, リスクが小さい点を選ぶべきである．よって効率的フロンティアのカーブは，最も左寄りのカーブの上半分となる．

無リスク資産のリターン平均値を 0 とした場合，どこが接線の接点となるか，ラグランジェの未定乗数法を用いて解く．

ラグランジェの未定乗数については，その項目を参照のこと．

問題：　3 銘柄 A,B,C からポートフォリオを構成する．ポートフォリオのリターン値を　$t_A \times returnA + t_B \times returnB + t_C \times returnC$　と，3 つの媒介変数で表す．当該期間の 3 銘柄のリターン値は与えられていて，ポートフォリオのリターン平均値とリスクは，3 つの媒介変数の式で表わすことができる．無リスク資産のリターンを 0 として，シャープレシオを最大化する，ブレンド比$t_A$, $t_B$, $t_C$を求めよ．

シャープレシオの式は以下であった．

$$\frac{リターンの平均値 \quad - \quad 無リスク資産のリターン値}{リスク}$$

このシャープレシオの式を，$sr(t_A,\ t_B,\ t_C)$ とする．ラグランジェの未定乗数法で解く．ラグランジェ関数は

$$L(t_A, t_B, t_C\ , \lambda) = sr(t_A, t_B, t_C) + \lambda(1-(t_A+t_B+t_C))$$

この式を，3 つの媒介変数で偏微分して 0 とおく．

$$\frac{\partial L}{\partial t_A}=0, \qquad \frac{\partial L}{\partial t_B}=0, \qquad \frac{\partial L}{\partial t_C}=0$$

これに，$t_A+t_B+t_C=1$　を 4 本目の方程式としてたして，4 元連立方程式として解く．虚数解が多数でてくるが，欲しいのは実数解のみで，以下が得られた．

$$\mathrm{t_A} \to 0.140, \qquad \mathrm{t_B} \to 0.222, \qquad \mathrm{t_C} \to 0.637$$

この比率でブレンドするポートフォリオがシャープレシオを最大化する．この比率の点が上図の接線の接点である．

　この図を描いていて，台風で芭蕉の葉が吹き飛ばされそうな様子に見えた．オックスフォードの夜中の風は激しい．引っ越し当初は，台風が毎夜来るようで，風の音が恐ろしかった．東京では，台風のとき以外，これほどひどい風は稀である．家の造りが石でがっちり組んであるのも必要だからであり，日本との気候との違いを感じた．

終わり

引用元：　芭蕉野分して盥に雨を聞く夜かな　　芭蕉