火山灰をあつめて暗しヨーロッパ　＜$\chi$二乗分布を用いた独立性の検定＞

2020 年 11 月中旬　白田由香利

海外に行く頻度が高ければ,事故に遭遇する確率が高くなるのは自然なことである.2010 年 4 月初旬,親友の H 教授とケンブリッジ，ニュートン研究所での国際会議を終えて，コーチ(高速バス)でオックスフォードに移動した直後，ヨーロッパ中で飛行機が飛べなくなっていることを知らされた．アイスランドの火山が大爆発して，火山灰と溶岩を噴き出しているので，ヨーロッパ中の飛行機が危険なので飛行できなくなっていた．第二次世界大戦以降，最もひどい飛行停止状況である．ホテルにいても，気管支系の弱い私は火山灰が降っているのを胸で感じる．このままでは大変なことになる．全集中の呼吸ではないが，座禅を組んでゆっくり呼吸していても限界はそのうち来る．イギリスに滞在中のフランス人は，仏政府の用意した軍の船で帰国していく．う，羨ましい．二人で毎日ロンドンの日本大使館まで状況を聞きに行き，何も救助や支援はないことを知らされ，その後 ANA のロンドン支社に向かい，同じように窮状にある同胞と情報交換を行った．ケンブリッジの国際会議でも，H 教授(女性)の周囲には東アジアからの女性留学生が集まり，楽しい歓談の和ができる．ANA の支店でも不安に怯える日本人をまとめるでもなくまとめ，皆でランチを取りにいくという集団形成を彼女はやってのける．一人でホテルに泊まり不安であった個々人が思い切り日本語で不安を話した後，笑顔になっている．本当にリーダーシップとコミュニケーション能力の天才だと思う．H 教授と一緒にいれば，たとえ火星に飛ばされても，H 教授が火星人と交渉して食糧物資を調達してくれそうな気がする．どのような困難も彼女と背中を合わせていれば，何とか乗り越えられそうと，勇気が湧いてくる．協力によって難局を打開するという経験を何度もくぐってきたが，こうした経験は人生の本当に楽しかった思い出であり，それはロックダウン時には元気の発電機になる．

話変わって，統計的仮説検定の一つに，$\chi$二乗分布を用いた独立性の検定がある．エックスではなく，ギリシャ文字のカイである．この独立性の検定では，始めに 2 次元の分割表が与えられる．分割表に書かれている数値は，度数でなくてはいけない．例えば，以下の分割表では，白田熊食品の新製品のカップラーメンの味「キャラメル味」に対する嗜好という属性と，男女という属性の 2 つの属性で表が構成されている．男女 195 人に聞きました．「この新発明の味は美味しいですか？」周囲の数値は行あるいは列の小計である．

| | 美味しい | まずい | 無回答 | |
|---|---|---|---|---|
| 男性 | 60 | 70 | 12 | 142 |
| 女性 | 15 | 32 | 6 | 53 |
| | 75 | 102 | 18 | 195 |

この独立性検定の帰無仮説と対立仮説は以下のように立てる．

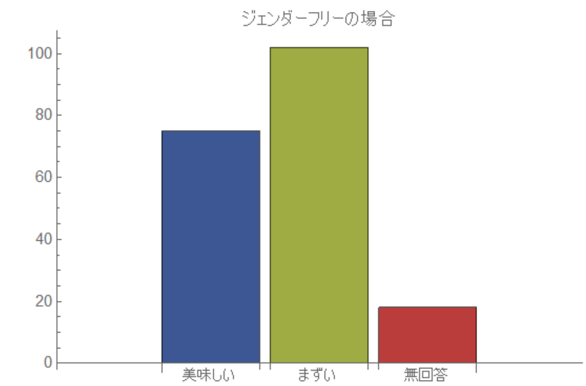
**帰無仮説：味の好みはジェンダー独立である．**

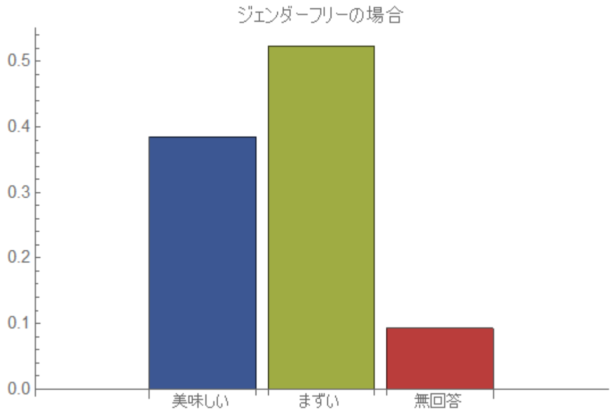
**対立仮説：味の好みはジェンダーに依存する．**

ジェンダー独立である，とは，男女の別による違いはない，という意味である．他の帰無仮説の例としては，以下のようなものが考えられる．其々2 次元の分割表を思い浮かべてほしい．

✧　新型コロナウィルスへの罹患の比率(かかった，かからない)はジェンダー独立である，

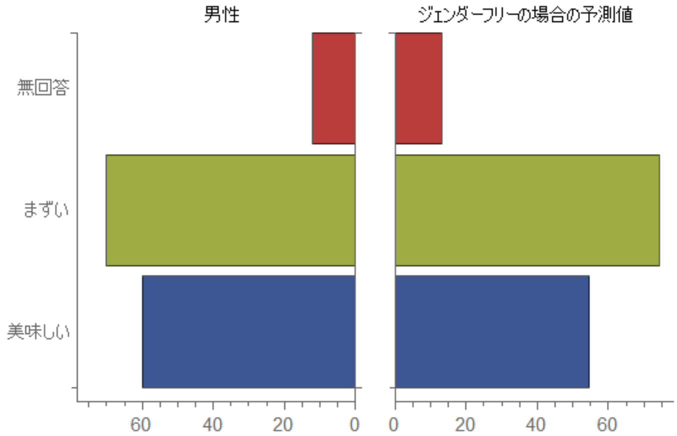
- ✧ ノート PC 所有率はジェンダー独立である，
- ✧ インフルエンザの罹患の比率は予防接種の有無に独立である，
- ✧ 米をネットで買うか店で買うかは世代に独立である，
- ✧ 保育園の数(人口比)は 47 都道府県で独立である，
- ✧ 国家試験合格者の比率は通った予備校 A か B か C か，に依らず独立である．

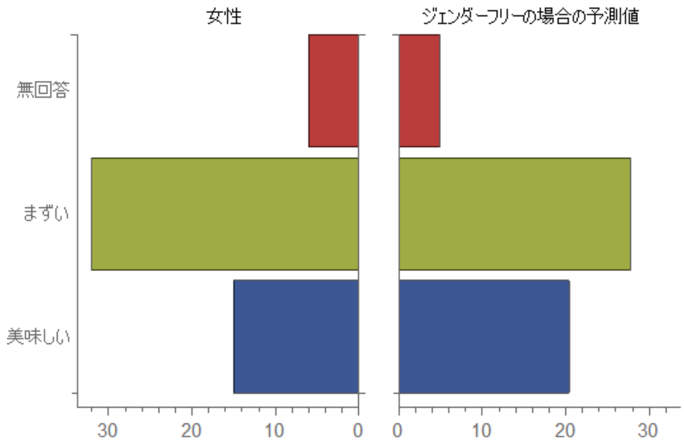



先ほどのキャラメル味の独立性検定に戻る．

上図は，回答者全体の度数(左図)と，比率（右図）である．仮にジェンダー独立であれば，上右のような確率分布{0.384615, 0.523077, 0.0923077}となると予測される．ジェンダー独立であれば，このキャラメル味を約 38%の人が美味しいという回答するだろう．以下に，ジェンダーフリーの場合の期待値と，実際の度数を並べてグラフにした．男性の場合，




まずいの観測度数が予測値よりも少ないこと(キャラメル味をまずいと思っていないのだろう)，女性の場合美味しいの観測値が予測値を下回り，まずいの観測値が予測値よりも上回っている点が目立っている．

独立性の検定では，左側の観測値(Observed value)と，右側の予測値（Expected value）がどれだけ離れているかで，帰無仮説を棄却するか否かを決定する．乖離が大きければ，棄却する．

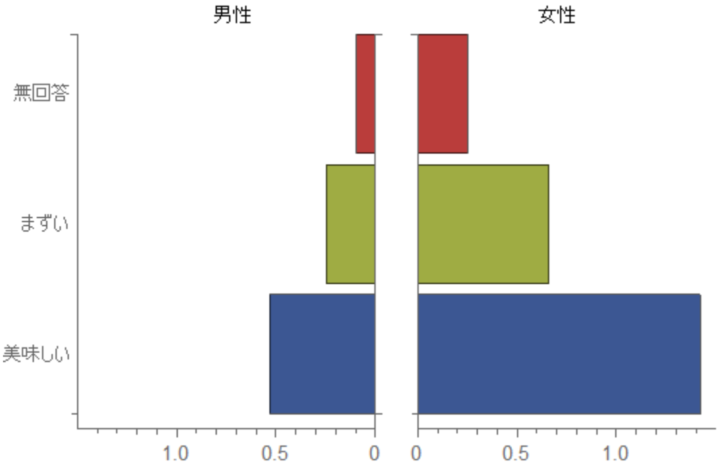
独立性の検定の統計量として以下のピアソンの $\chi$ 二乗値を計算する．

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

但し上記の式において O は観測値，E は予測値を表す．O と E の差を二乗して，予測値で割った値を，

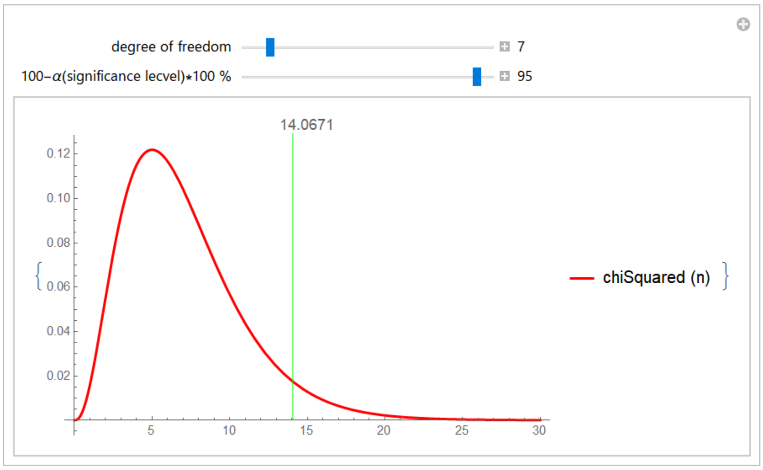
分割表の全部のセルについて足し合わせる．

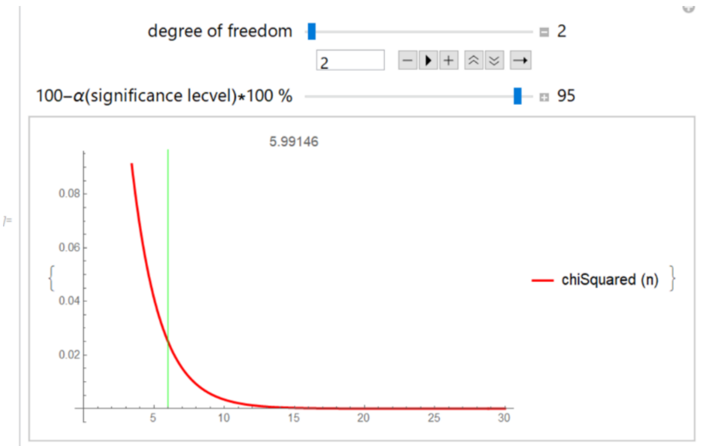
さて，ピアソンの $\chi$ 二乗の統計値はいくつになるだろうか，計算してみる．$\chi^2 = 3.2$　であった．各セルの数値を以下のグラフで示した．女性の美味しいとまずいの貢献が大きいようすが見てわかる．




さて，この独立性の検定では何分布を使うべきなのか？　正規分布ではなさそうだ．理論として，先のピアソンの $\chi$ 二乗の値は厳密には $\chi$ 二乗分布に従うのではないが，総度数が大きい場合には近似的に $\chi$ 二乗分布に従うことが分かっているので，それを使う．

$\chi$ 二乗分布は，横軸に $\chi$ 二乗値をとる確率密度関数である．以下に例として，自由度 7 の $\chi$ 二乗分布の確率密度関数を示す(https://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/VDStat　参照)．横軸は $\chi$ 二乗値であり，予測値と観測値の乖離が大きくなると，横軸の右側のほうの値に移って来る．両側検定という概念は $\chi$ 二乗分布の場合，無い．




図では，有意水準 5%の限界値を示している．約 14.0 である．

今回のキャラメル味の検定では，自由度は行列数が男女で 2，列数が 3 択で 3 であるので，両方から 1 を引いてかけて，（2 − 1）×（3 − 1）＝ 2，自由度は 2 である．左下図に自由度 2 の $\chi$ 二乗分布を示す．有意水準 5 %の限界値は 5.99 である．計算した $\chi$ 二乗値は 3.2 であったので，帰無仮説は棄却されない．結論は，**味の好みはジェンダー独立である**ということは否定されない，となる．積極的に支持されるわけではないが，帰無仮説は棄却されなかった．キャラメル味のカップラーメンなど誰が食べるのか，と個人的には思うのだが，存外，若い人には受けるかもしれない．

終わり

引用元：五月雨をあつめて早し最上川　芭蕉

寂しさや須磨に勝ちたるオクスフォード　＜$\chi$二乗分布を用いた適合度の検定＞

2020 年 11 月中旬　白田由香利

いつかゆっくり子供無しで，オクスフォードでのんびり優雅に食事やお茶を楽しみたいと長年思っていたが，こういう形で実現するのも情けない．2010 年 4 月飛行機が欧州中で飛ばず帰るに帰れなくてオクスフォードに滞在した．飛行場に近いロンドンはこの災害のため，人であふれているからだ．時間はあるので Ma 先生と夕刻，川のほとりのパブで夕食を取る．付近には野生(多分)の馬も走っていて幻想的に美しい．人間，長年の夢が実現する時には何か瑕疵がついてくる，というのが私の持論である．一般論としてお金もちになったら健康を損なったとか，これは今の私だが，せっかく科研 B が取れたと思ったらコロナでロックダウンとか．それでも，その状況をできる限り楽しみ，来るべき時に備えて英気を養うほうが良い．一緒に宿泊している H 教授は，イギリス人気質を考慮して，私と Ma 先生との夕食には参加しないで，オクスフォード，サマータウンの中華料理店に一人で通う．そこでも，中国人の店の人たちとすぐに仲良くなって数日後には「我が妹よ」とご店主から呼ばれていた．信じられない位の素晴らしいコミュニケーション能力である．2 人で帰国計画も練った．有名なブラックウェル書店に行き，トーマスクックの旅行本を買い，日本へのルートを考えた．アリタリアは飛んでいるので，ミラノに着きさえすれば日本へ飛べる．女性二人なのでユーロスター周辺は混雑のため危ないであろう．船を使いドーバー海峡を渡りフランスのカレー港へ行き，列車を乗り継ぎ，ミラノへ．他の案としては，カレーからオリエント急行でミュンヘンへ行き，伯母に会って後は助けてもらう等など．この伯母にはリアルなドイツの飛行機運航状況を教えて頂けて，本当に有難かった．確実な情報は宝である．ルートを考え，いざとなったら実行するしかない，と二人で真面目に考えていた．東京の家では子供が「ママが死んでしまう」とめそめそしているし，4 月の講義も始まってしまう．大学の先生にとって初回の講義は履修者を確保するため，非常に重要な逃せないものである．日本は遠く，気持ちは焦るばかりである．

さて，$\chi$二乗分布を使った検定の話を続ける．ピアソンの$\chi$二乗検定は，前述した独立性の検定の他，適合度の検定としても使われる．適合度の検定問題というのは，理論的に 3：2 であるはず，というような理論度数が始めに与えられていて，観測された度数が理論度数から大きく乖離しているか否かを検定する．帰無仮説は，理論度数に適合している，とする．もし，理論度数から大きく乖離していれば，帰無仮説棄却となる．

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

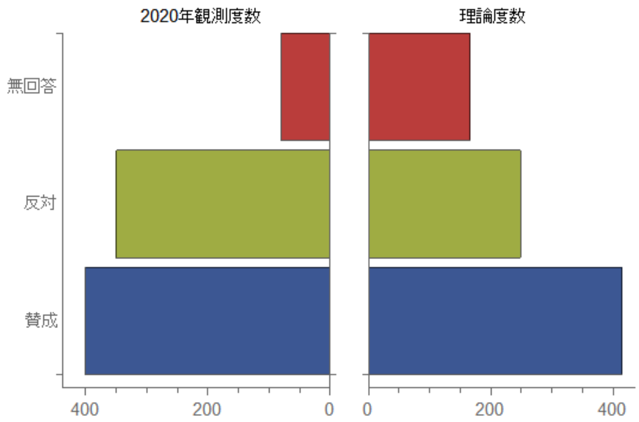
ピアソンの$\chi$二乗の式は独立性の検定のときと同じである．但し E は理論度数である．

例 1：動物村で州知事の再任に賛成か反対かを聞いた．2019 年度の調査結果では，賛成：反対：無回答の比率は 5 ： 3 ： 2 であった．2020 年 11 月に行った調査の結果の回答数は 400：350：80　であった．2020 年のこの調査結果は，2019 年度の比率と異なるか？

**帰無仮説：2020 年度 11 月の賛成，反対，無回答の比率は，{0.5，0.3，0.2}である．**

**対立仮説：2020 年度 11 月の賛成，反対，無回答の比率は，{0.5，0.3，0.2}ではない．**

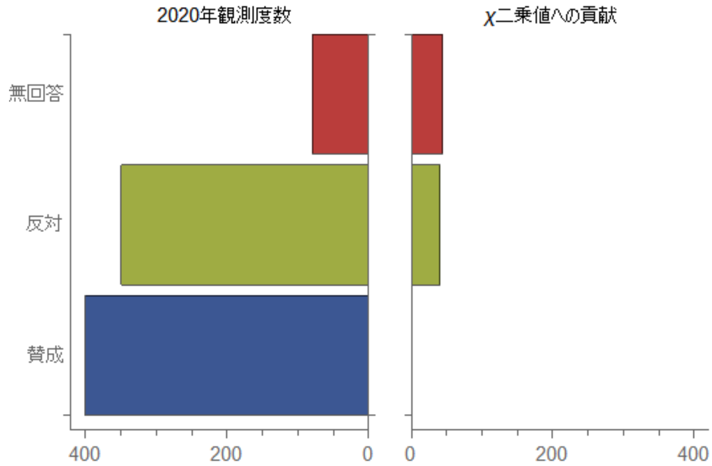
理論度数は，2020 年度の全回答数 430 に，2019 年度の比率を掛けた値である．{415.,249.,166.}となる．以下に，観測度数と理論度数のグラフを載せる．2020 観測度数は，理論度数に比較して反対が多く，無回答が減っていることが分かる．今まで反対せず無関心であった動物たちが反対派になったのであろうか？　あれこれ理由を考察してみる．



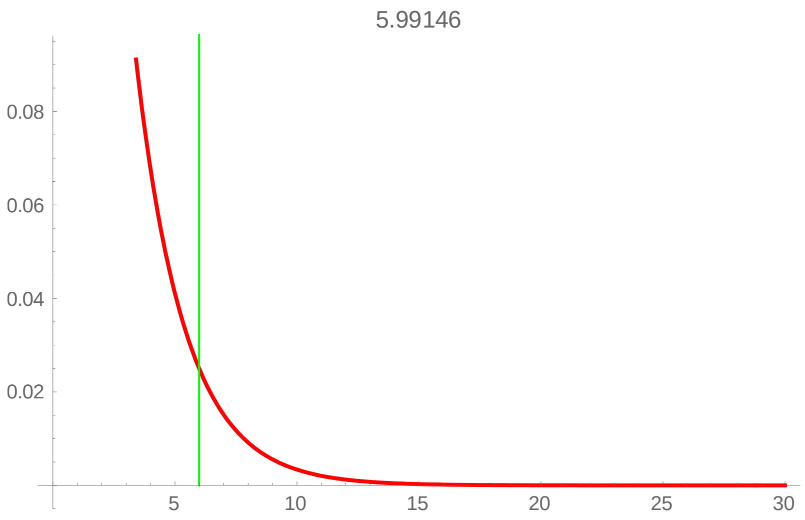

　$\chi$ 二乗値を計算すると，

0.542169+40.9679+ 44.5542≅86　となった．

各セルの貢献のようすを以下の図に示した．反対と無回答が大きく貢献していることが分かる．賛成の変動による貢献は殆ど無い．




　ここで，$\chi$ 二乗分布を使うわけだが，自由度はいくつにすればよいだろうか．排反な 3 つのカテゴリー（賛成，反対，無回答）に分類されているので，この例のピアソンの $\chi$ 二乗値は，自由度 2（＝３－１）の $\chi$ 二乗分布に近似的に従う（下図参照）．どうして近似的に $\chi$ 二乗分布に従うことが分かるのか，それは先人の統計学者が証明してくれているので，有難く証明無しで使わせて頂くこととする．




　有意水準 5 %で検定するとすると，限界値は 5.99 である．今回の $\chi$ 二乗値は 86 であり，限界値を大幅に超えている．よって，帰無仮説は棄却される．結論は，2020 年度の結果は，2019 年度の結果の比率と適合しない．

他の例題もあげておく．

例２：　虎の間病院分院では，コロナ禍以前は通院者数の比率が月曜から金曜まで１：１：１；１；１であった．2020 年 10 月の調査では通院者数が，２００：１６０：１７０：１８０：２６３であった．コロナの前と後で曜日による通院者の比率は変化したか？

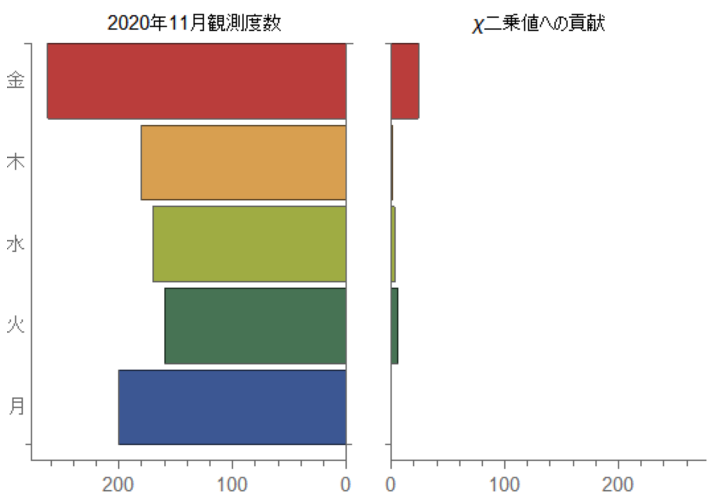
**帰無仮説：コロナ前の月火水木金の通院者の比率は，**１：１：１；１；１**である．**

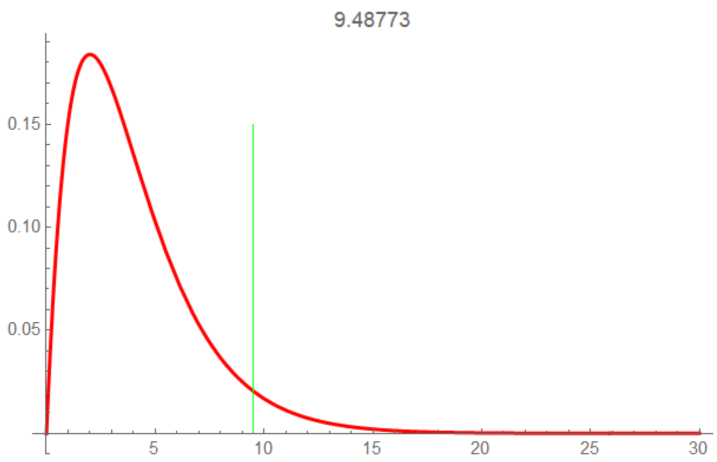
**対立仮説：2020 年度 11 月の月火水木金の通院者の比率は**１：１：１；１；１**ではない．**

そもそもこの検定の目的は何か？　例えば，病院経営サイドとしては，看護師や受付等のアルバイトの人員の割り振りを見直し無駄をなくす，可能な限り通院者数の均一化を図るように通院者を誘導すること(医師のスケジュールを変える等して)等が考えられる．需要の調整(この場合，医療サービスを需要したとみなす)及び管理は経営者の重要な責務である．

理論度数は{194.6, 194.6, 194.6, 194.6, 194.6,} である．2020 年 11 月の観測値と，$\chi$ 二乗値へのセルの貢献をグラフにした(下図参照)．観測値と理論度数の乖離が大きいのは金曜であることが分かる．

この事例でのピアソンの $\chi$ 二乗値は約 34.5 であった．




使う分布は，自由度４（5-1 である）の $\chi$ 二乗分布である．有意水準を５％とする．限界値は下図に示すように，約 9.5 であった．34.5 は棄却領域に落ちる．よって帰無仮説は棄却される．結論は，**2020 年度 11 月の月火水木金の通院者の比率は**１：１：１；１；１**ではない**，となる．

終わり

引用元：寂しさや須磨に勝ちたる浜の秋　芭蕉