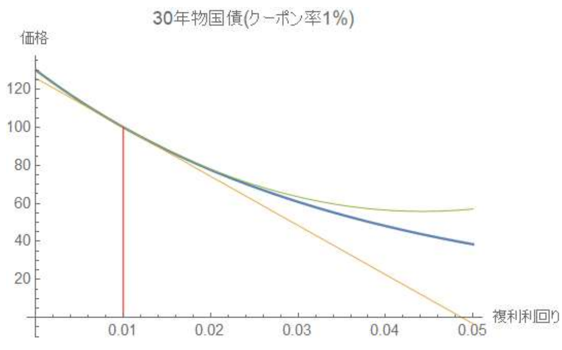
何事の故とは知らず青インク　<金利リスク デュレーション＞

2021 年 2 月中旬　白田由香利

　恩師の形見分けで万年筆を頂いた。恩師の先生が集めていらした珍しい、どれも美しいインクも多数頂いた。早速、丸善の万年筆売り場で掃除をしてもらい、少しインクも買い足した。英語には洋物の万年筆のほうが向いていて、日本語であれば日本製が向いていることなどの説明を受けた。丸善の店員氏が「仲間うちで小分けにして交換した」というエメラルド・ブルーのインクの小瓶を見せてくれた。公式文書の署名には使えないが、美しい。手紙をシェーファーのブルーのインクで書くと、ブルーが鮮やかで、自分の下手な字でも色味の美しさにうっとりしてしまう。吸い取り紙で余分なインクを取っていると、推理小説の探偵がこの裏返しの字跡を証拠としているくだりが浮かんでくる。頂いたグリーンや各種の青のインクを観察するとインクの名称がフランス語などで書かれていて、恩師が外国の文具やで見つけてきた珍しいものだろうと想像できた。外国のお土産にインクというのは、おしゃれな趣味だと思う。私も恩師を真似て、コロナ明けでオクスフォードに戻れたらサマータウンの文具店でインクを買おう、と決意を新たにした。ということで、私は本日から万年筆派。恩師の万年筆で字を書いていると、言いようのない、かたじけない思いがする。

　金利が変動した場合、所有している資産で将来の負債を支払えるか否か、を評価する方法について述べる。

 知りたいことは金利 r が r+Δr に変化した場合（変化分はΔr ）に、価格 P(r)がどれだけ変化するかである。価格の変化分はΔP＝P(r+Δr)―P(r) と表すことができる。



 現在の金利での価格の点で、近似直線あるいは近似曲線を引く(右図参照)。連続関数であれば、どのような関数に関しても、任意の点においてマクローリン展開(べき級数に展開)できる。マクローリン展開によって f(x)を x=a の点において 1 次まで展開、2 次まで展開、3 次まで展開すると以下のように近似できる。

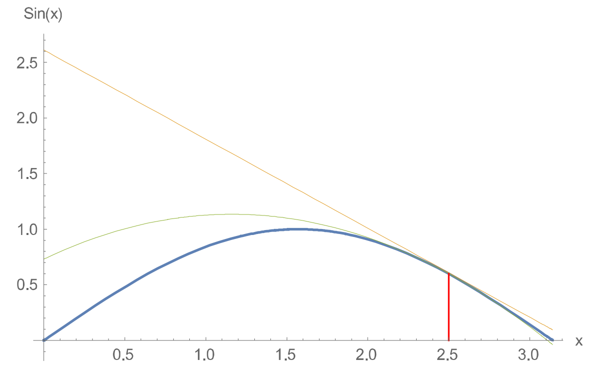
$$f[x] \fallingdotseq f[a] + f'[a](x-a)$$

$$f[x] \fallingdotseq f[a] + f'[a](x-a) + \frac{1}{2}f''[a](x-a)^2$$

$$f[x] \fallingdotseq f[a] + f'[a](x-a) + \frac{1}{2}f''[a](x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}[a](x-a)^3$$

 右図では 2 次までしか描いていないが、次数を高めるほど、近似がよくなる。$f'[a]$　は x=a での微分係数を表す。$f''[a]$　は 2 次の微分係数を、$f^{(3)}[a]$　は 3 次の微分係数を表す。注意したい点は、x=a の近傍での近似式であることである。関数全体の近似式ではない。よって、x=a が変動してから離れれば、近似は悪くなる。

マクローリン展開は金融に限らない一般的な数学の公式である。例えば、f(x)=Sin(x) を x=2.5 の点においてマクローリン展開する(下図参照)。1 次まで展開すると、x=2.5 における接線の直線式となる(黄色)。



2 次まで展開すると x=2.5 において Sin(x)に接する 2 次式となる(緑)。次数を増やすほど、x=a の近傍において f(x)に近い形状となる。x=2.5 の近傍においては、この近似式を使って x が微少量変化したときの値を求めることができる。

金融ではこの 1 次の微分係数に対応する概念がデュレーション D で、2 次の微分係数に対応する概念がコンベクシティ C である。

$$D=-\frac{\frac{dP(r)}{dr}}{P(r)} \qquad C=\frac{\frac{d^2P(r)}{dr^2}}{P(r)}$$

金利リスクの場合、3 次以上の項は微小なので普通利用しない。使うのは C までである。2 次までのマクローリン展開を使ってΔPを近似しよう。

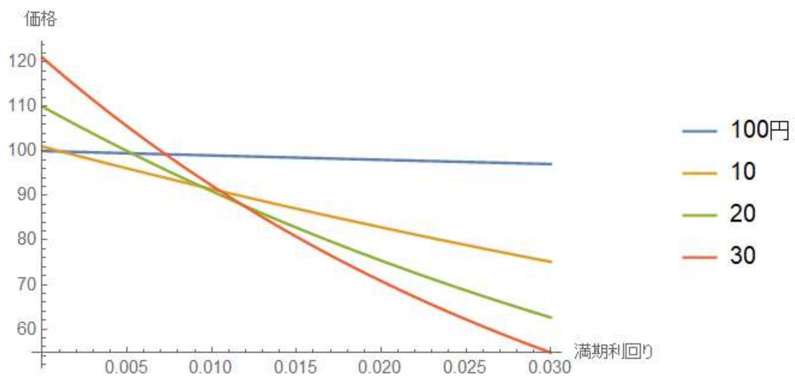
$$\Delta P = P\left(r+\Delta r\right)-P(r) \cong \frac{dP(r)}{dr}\Delta r+\frac{1}{2}\frac{d^2P(r)}{dr^2}(\Delta r)^2,$$

$$\frac{\Delta P}{P} \cong \frac{\frac{dP(r)}{dr}}{P}\Delta r+\frac{1}{2}\frac{\frac{d^2P(r)}{dr^2}}{P}(\Delta r)^2=-D\Delta r+\frac{1}{2}C(\Delta r)^2$$

上記の式$\frac{\Delta P}{P}$を使えば、D と C が分かっている国債に対して 0.01%金利上昇（$\Delta r = 0.0001$）した時, P=100 に対して P がどれだけ変化するか(ΔP)などが近似的に求められる。

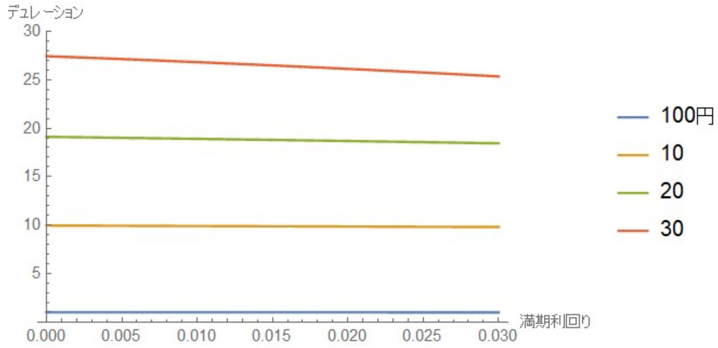
問題： 以下の価格、デュレーション、コンベクシティの関数をプロットせよ。横軸は満期利回りとする。すべて半年複利で計算せよ。

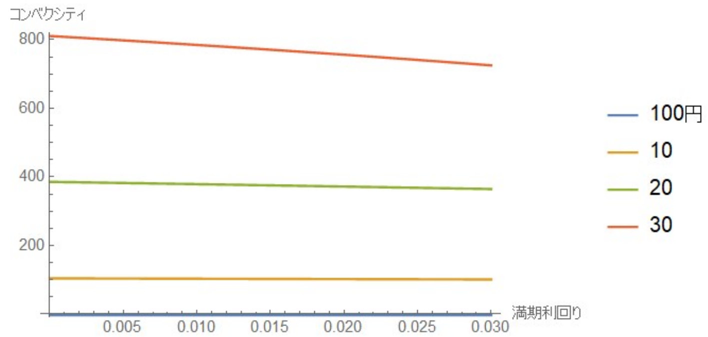
(1) 10 年固定利付国債、クーポン率 0.1%
(2) 20 年固定利付国債、クーポン率 0.5%
(3) 30 年固定利付国債、クーポン率 0.7%
(4) 1 年後の 100 円 $\frac{100}{(1+\frac{r}{2})^2}$



価格を見ると、1 年後の 100 円は変化が少ない。3 種類の国債の価格は、30 年物の傾きが最も大きい。

以下に、D と C のグラフを描いた。D も C も、30 年物が最も大きいことが分かる。





よく、資産側と負債側でDを合わせるように、と言われるが、それは金利変動に対して価格変動が同じ量になるようヘッジをかける、という意味である。

金利変動を詳細に分析しようとしたら、与えられた D や C の値を使うだけでなく、広い範囲の満期利回りに対して、価格がどのように変化するかをグラフィクスで描いてみることが重要である。Mathematica のような数学ツールを使えば、長期国債の価格の微分なども簡単に行える。また、時系列で追っていき、残存期間が減っていく際の様子をシミュレーションすることもできる。数学ツールを使い、グラフィクスで見て確認することが重要である。

引用元：　何の木の花とは知らず匂いかな　　芭蕉

参考文献

[1]服部孝洋：金利リスク入門～デュレーション・DV01（デルタ、BPV）を中心に：シリーズ 日本経済を考える 105，ファイナンス，2020，10 月号，
https://www.mof.go.jp/pri/research/special_report/f01_2020_10.pdf

[2]服部孝洋：コンベクシティ入門～日本国債における価格と金利の非線形性：シリーズ 日本経済を考える 107，　ファイナンス，2020，12 月号，
https://www.mof.go.jp/pri/research/special_report/f01_2020_12.pdf