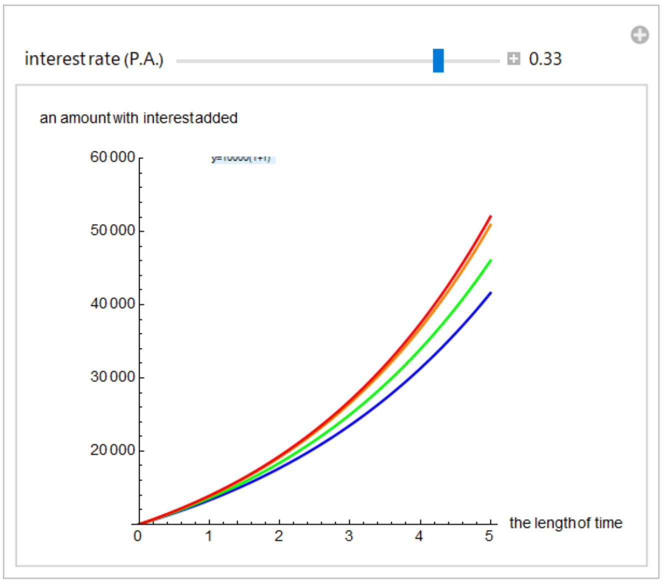
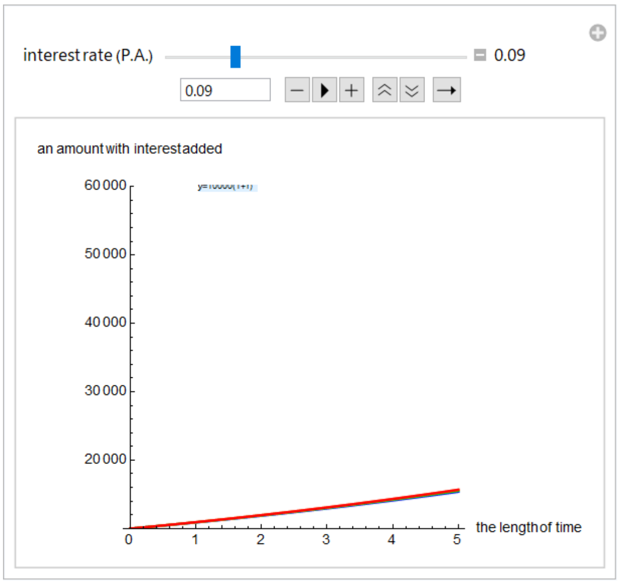
語られぬ e 値にぬらす袂かな　　<連続複利>

2020 年 10 月上旬　白田由香利

初めてインドネシアに行ったのは 2012 年の KCIC という国際会議で基調講演をした時だった．ジャカルタに次ぐ大都市スラバヤの工科系大学院大学で，慶応大学の清木教授の大チームに交じり参加させて頂いた．この時に高級土産物屋で買ったバティークのシャツは今でも愛用している．さすがインドネシアの暑さに耐えられるような涼しい肌さわりなので，今年のコロナ禍猛暑でも 35 度を超える日は毎日のように着ていた．品質が良いので毎日洗濯しても劣化しない素晴らしさである．このバティーク・シャツとともに思い出すことは，「イスラム金融の国で欧米風の金利法を気づかずに教えた，大バカ人間は．私が最初なのではないか」という事件である．インドネシアのメイン宗教はイスラム教で，その金融形式はイスラム金融である．イスラム金融には金利の概念はない．そのことに全く気付かずに，いつもの講義のように KCIC で講演を始めた．聴衆は，工学系の大学院生が殆どであった．その方々が首をかしげて怪訝な顔をしている．壇上から私が聞くと，「どうしてお金が増えるのか分からない」との答え．それを聞いてさすがの私も「あ，イスラム金融だからだ」と気が付いた．イスラム金融に金利の概念はない．ここで慌てたが，動揺を隠し，「こういうようにお金を預けているとお金が指数関数的に増えていく方式があったと仮定しましょう」と，複利法を前提条件にして話を進めた．最後まで「どうしてお金が自然と増えていくのか？」と聴衆の皆様は，疑問をもったまま講演は終了．ずっと近年になり 2018 年にインドネシア国立大学経済学部にサバティカル休暇で滞在したが，さすがに経済学部では，複利法は知られている．今でも思い出すと恥ずかしさで冷や汗が出る．

複利法の説明をする．銀行に預金したとする．年利率 r(例えば，0.0012)が同じでも，1 年間に何回複利計算をするかによって元利合計(元金プラス利息分)は異なる．下図は，左は年利率 33%(有り得ないほどの高利率)で，1 年に 1 回(青)，1 年に 2 回(半年複利)(黄緑)，1 か月ごと(黄色)，最後に，1 年間に無限大回(赤)の複利計算を行ったとき，どのように元利合計が増加するかを表している．初期投資額は 1 万円とする．横軸は経過年数である．赤，黄，黄緑，青の順で元利合計が大きいことが分かる．右は年利率が 9%のときである．利率が低いと，4 種類で差が見えない．



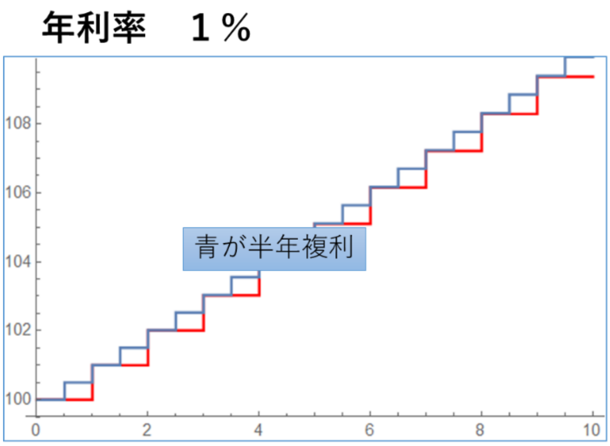


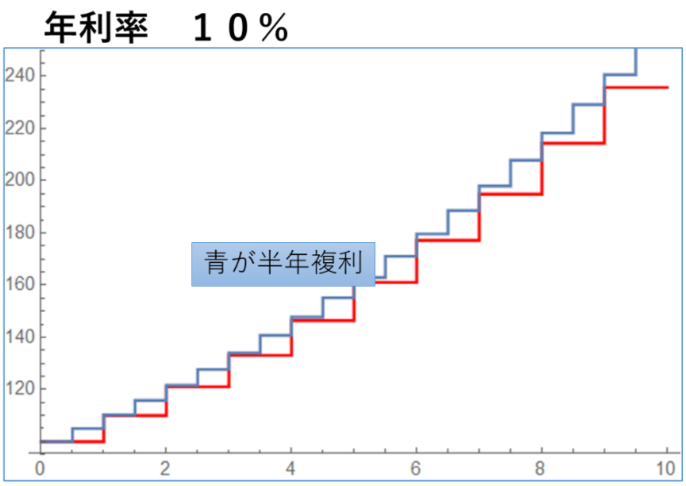
頻繁に複利計算をしたほうが元利合計が大きくなる．銀行預金において，半年複利の他に，もし仮に，1 か月に一度の複利計算というオプションがあったならば，その方がお金は増える．しかし現在の低金利では差は殆どでない．上右図は年利率が 9%（有り得ないほどの高利率だが）でも，殆ど差がでないことが見てわかる．右の表に，複利法の公式を示した．5 年後に元金の何倍になるのか倍率を示した．

1 年に何回の複利計算	呼び方	5年後の元利合計額
1	Annually (P.A.)	$\left(1+\frac{r}{1}\right)^{5}$
2	半年複利 Semiannually (S.A.)	$\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2\times5}$
4	Quarterly (Q.A.)	$\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4\times5}$
12	Monthly (M.A.)	$\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12\times5}$
無限大	連続複利	$e^{r\times5}$

それでは，1 か月ごと，1 週間ごと，1 日ごと，1 時間ごと，1 秒ごと，と複利計算の回数を増やしていくと天井知らずに元利合計が増加するのではないだろうか，と期待をもつ方がいらっしゃるかもしれないが，その期待は裏切られる．上限はある．1 年間に無限回の複利計算をした場合を連続複利と言う．連続複利の場合，n 年後の元利合計は e^{rn}となる．e とは，自然対数の底(てい)，ネピアの数である，約 2.71828 と無限に続く無理数で，3.14 の円周率が不思議な数の東の横綱であったならば，e は西の横綱と言える．いかにも人間くさい複利法の公式において，連続複利では e が出現するとは全くの驚きである．涙を流すほどではないとしても，数の神秘を深く感じる．

1 年に 1 回の複利計算と，半年複利の場合，100 円を預けた場合どのように元利合計が増えるかを可視化した．右下図は年利率 1%のときで，1 年ごとの元利合計に差は見えない．しかし，年利率が 10%と有り得ないほと大きくすると，青の半年複利のほうが大きくなっていくようすが見える．





終わり

引用元：語られぬ湯殿にぬらす袂かな　　芭蕉

＊ KCIC の基調講演：　Yukari Shirota, Takako Hashimoto, and Tetsuji Kuboyama: "A Deductive Reasoning Method for Solving Bond Mathematics Problems", Keynote talk of KCIC 2012 (The First Indonesian-Japanese Conf. on Knowledge Creation & Intelligent Computing), March 13-14, 2012, EEPIS Press, 2012, Surabaya, Indonesia.

病雁の夜寒に落ちて雪まみれ　＜ボーナス金利＞

2020 年 10 月上旬　白田由香利

人生，どうしようもなく辛かったことはよく覚えている。2006 年オックスフォードで暮らしていた時のこと，息子のプライマリー・スクールに夕方のお迎えに行った。校庭は雪が積もり，子供たちは駆け回って遊んでいる。私は，朝から悪寒がして今にも倒れそうな状況だ。子供を呼ぶが，遊びに夢中で母親の具合のわるさ等考えもせず，何度呼んでも来ない。こういう時は校庭の広さが恨めしい。雪の降る中，心で「もうここで倒れたい」と泣きながら，立ち続ける。寒い，足元から深々と寒さが伝わってくる。異国の旅中に病むと，助けもなく本当に心細いものだ。日本にいたとしても，今，一人頑張るしか手立ての無い状況で頑張るお母さんたち。心より幸あれ，と念じるばかりである。

外貨預金のお金の計算をする。冬のボーナス・シーズンになると外貨預金の特別金利のお知らせがよく見受けられる。例えば，以下の文章題を考えよう。

＜ボーナス金利の文章題＞

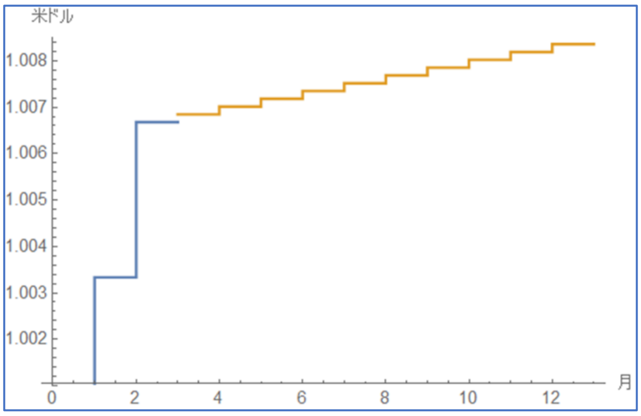
- 米ドル外貨預金にお金を預ける。初回ボーナス特別金利で，2 か月間年利率 4 %にしてくれるという。それ以降は通常の年利率(0.20%)に戻る。1 米ドル預金した場合，12 か月後にいくらになるか。

1 か月ごとに複利計算をすると仮定する。最初の 2 か月はボーナス金利で，始めに預けたお金が以下の倍数で増加していく。

$$R1 = 1 + \frac{0.04}{12} = 1.00333 \ldots$$

年利率 4%であるから，1 ヶ月分の月利率は 12 で割って，約 0.00333 である。預けたお金は減ることはないので，元本分の 1 を足して約 1.00333 倍となる。3 か月以降の月利率はどうなるか？　通常の年利率が 0.2%=0.002 とすると，以下のようになる。

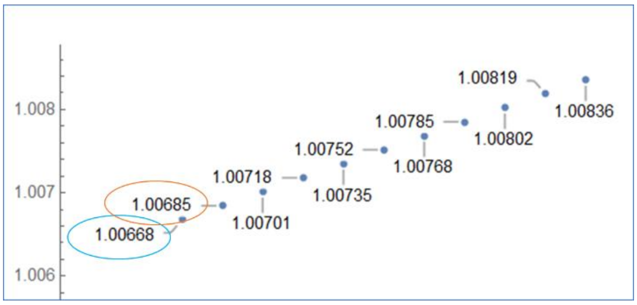
$$R2 = 1 + \frac{0.002}{12} = 1.00016666 \ldots$$



R1 と R2 の倍率の違いは数字だけ見ていてもよく分からないので，可視化してみよう。

右図に示した。横軸は経過月数で，縦軸は元利合計(米ドル)である。縦軸は 1 ドルから始まっている。1 か月後に 1.00333 ドルになり，2 か月後に 1.006 ドルを超える。ここまでは順調に増加しているが，その後は通常の低金利に戻るため，増加の幅は小さくなる。

計算は以下のように，始めの 2 回だけ R1 をかけて，その後は R2 を掛け算，となる。



- R1
- R1×R1
- R1×R1×R2
- R1×R1×R2×R2

実際の外貨預金では，預金の年利率よりも，円高の影響が大きく効いてくることがある。以下の文章題を考えてみよう。
＜外貨預金の文章題＞

- 100 万円を米ドル外貨預金に預ける。初回ボーナス特別金利が 2 か月間だけ年利率 4 %ある。それ以降は通常の年利率(0.20%)に戻る。米ドルで 5 年預金した後，日本円にもどすといくらになるか。交換手数料は片道で　$0.5\left[\frac{日本円}{米ドル}\right]$，月ごとに複利計算するとし，為替レートは 5 年間，$113\left[\frac{日本円}{米ドル}\right]$で変化がなかったとせよ。

100 万という日本円を米ドルに交換するところから始める。

$$1000000 \div (113 + 0.5)$$

$$= \frac{1000000[日本円]}{113.5\left[\frac{日本円}{米ドル}\right]} = 8810.572687[米ドル]$$

為替の 113 で割り算するだけでなく，交換手数料が 1 ドルあたり 0.5 円銀行に取られることを忘れずに。その分，分母が大きくなるので，手元にくる米ドルの金額が小さくなる。結果，約 8810 ドルを手にした。これを外貨預金に預ける。

$$8810.572687[米ドル] \times R1^2 \times R2^{12\times5-2} = 8955.553865[米ドル]$$

$$8955.553865[米ドル] \times (113-0.5)\left[\frac{日本円}{米ドル}\right] = 1007499.81[日本円]$$

8810 ドルに倍数 R1 を最初の 2 回掛け算する。残りは何か月かというと，（12×5－2）ヶ月である。この間，倍数は R2 である。この掛け算の結果，5 年後の外貨預金の元利合計が約 8955 ドルとなる。さて，次に，米ドルを日本円に交換する。為替の 113 を掛け算するだけでなく，交換手数料が 1 ドルあたり 0.5 円銀行に取られることを忘れずに。結果として，約 1007499 円の日本円を手にした。

円高の効果を見てみよう。日本円に戻す際に，円高が起こり，為替が 100.5 [日本円/米ドル]だったとする。その場合，

$$8955.553865 \times (100.5 - 0.5) = 895555.3865$$

となり，初期投資 100 万円であるのに，5 年も預金したのに約 90 万に減ってしまった。円高の影響は大きい。

終わり

引用元：　病雁の夜寒に落ちて旅寝かな　　芭蕉

計算に悟らぬ人の貴さよ　＜住宅ローン＞

2020 年 10 月上旬　白田由香利

　旅先での美味なるものの土産話は面白いものだが，不味いものの話はさらにインパクトがある。自分の記憶の中で不味かったものランキングを思い起こしてみる。まずランキング 1 位。小さい頃，高原の峠の茶屋のようなところで休憩した。他に客はなく，客が来た時の「さんざめき」のような記憶も店には全く感じられなかった。しかし，暑さの中選択の余地はなく，店に入り，トコロテンを注文した。長いこと待たされて出てきたトコロテン。とても食べられたものではなかった。母の形相が変わり，「食べなくていいです」と短く私に言い，お代よりもはるかに少ないお金を手渡し，店を後にした。店の人も深く了解しているようで，それに対して何も言わなかった。ランキング 2 位。息子のクラブの合宿先でのキャベツの千切りがありえないほど不味かったと言う。キャベツの千切り，どのようにしたら不味くなるものか，思い出す度に大笑いしてしまう。ここから外国篇である。イギリスの食事はまずい，とよく言われるが，2006 年にオックスフォードに引越しをし，初日ホテルの朝食で食べたソーセージが塩辛くて食べられなかった。しかし，これは売られているソーセージの塩が効きすぎているだけで，不味いわけではなかった。本当に不味いソーセージには，数日後，オックスフォード市街地のデパート上階のレストランで遭遇した。食べ物には無頓着なほうであるが，これは美味しくなかった。ユーロスターでヨーロッパ大陸に渡る際も，イギリス発とフランス発で，車内の食べ物の質が違うように思う。ロンドンからベルギーに着き，カフェに入ったとき，コーヒーの美味しさを深く感じた。もちろん，コッツウォルズでの土地のお料理等美味しくて嬉しかった思い出は多数ある。日本でもイギリスでも美味しさは店に依存する。異国ランキング 1 位は，2006 年ロンドンからストックホルムに飛んだとき，機内で購入したサンドイッチかもしれない。当時 6 歳の息子が「お腹がすいた」と言うので，非常に高い値段のサンドイッチを仕方なく購入。しかし，一口食べるなり，「母さん，あげる」と私によこしてきた。私の料理が不味かった話もしよう。オックスフォードへの引越し直後，日本人の知り合いが遊びにきてくれた時，息子が「母さんの野菜いためがベチャベチャでとても不味い」と愚痴をこぼした。まな板もなく，IH の火加減にも，食材にも慣れず，それでもファブフード(レンジで温めるだけの食事)では健康によくないと，それなりに母として頑張っているのに，なんたる雑言。腹が立つ。

　不思議と不味かった食べ物の思い出は，元気をくれる。不味くて驚きましたねぇ，と話すと当時のことが思い出されて心身が活性化する。

2 年齢から考える

32歳vs42歳、今と10年後で比較。
結論を先送りすると、月約3.8万円の負担アップ

早く購入すれば返済期間を長くでき、その分月々の返済額が抑えられます。節約できたお金は教育費としてはもちろん、退職後やもしもの場合の蓄えにできます。40代は教育費や退職後の備えに加え、親の介護などにもお金が必要になる時期。将来の出来事を見越して支出のピークを分散させることで、家計が楽になります。

■ 返済スタート年齢の違いによる資金シミュレーション

月々の返済額を比較

借入額	借入時の年齢	返済期間	毎月返済額
4000万円	32歳	35年	12万2473円
	42歳	25年	15万9974円

35年返済だと月々の返済額を抑えられ、教育費や老後のための貯蓄も計画的にできる

購入予算（借入可能額）を比較

毎月返済額	借入時の年齢	返済期間	購入予算（借入可能額）
12万円	32歳	35年	3919万円
	42歳	25年	3000万円

返済期間が長くとれると購入予算が増え、エリアや物件選択の幅が広がる

※ ともに金利1.5%固定、ボーナス返済なし、67歳を返済終了時期とした場合

　住宅ローンの返済金額の話をする。現実に行われている実例を使おう。上記は，リクルート社が駅に置いている無料雑誌「SUUMO 新築マンション」，2019 年 8 月 20 日の一部である。これを自分で計算しよう。毎年 4 月の履修登録期間には「私の経営数学 2 を履修するとこういう実用的な計算が自分でできる

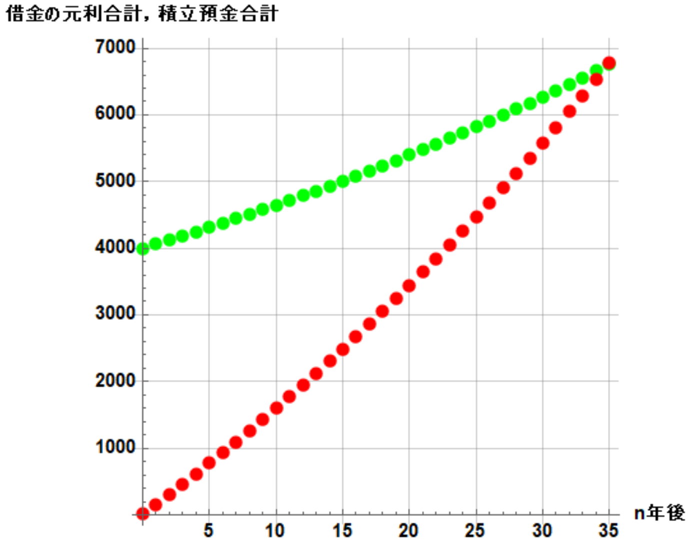
ようになります。是非履修しましょう」と，繰り返し学生に説得を試みる。しかし，数学への苦手意識から経営数学を避ける学生が多い。2 年生になってから履修しても遅くはないが，1 年生で勉学への勢いがあるうちに一気に勉強したほうが，効率が良い。鉄は熱いうちに打て，である。お金の計算はできたほうが絶対に得だと思う．(知らない悟らないほうが貴い，ということは無い)

　上記の住宅ローン問題を以下のように文章題化する。

＜住宅ローン　文章題＞

　4000 万の住宅ローンを組み，35 年で完済したい。ローンの年利率は 1.5%で固定とする。毎月の返済額を計算せよ。

　私の講義では，追撃法という愛称をつけて住宅ローンの解法を教えている。



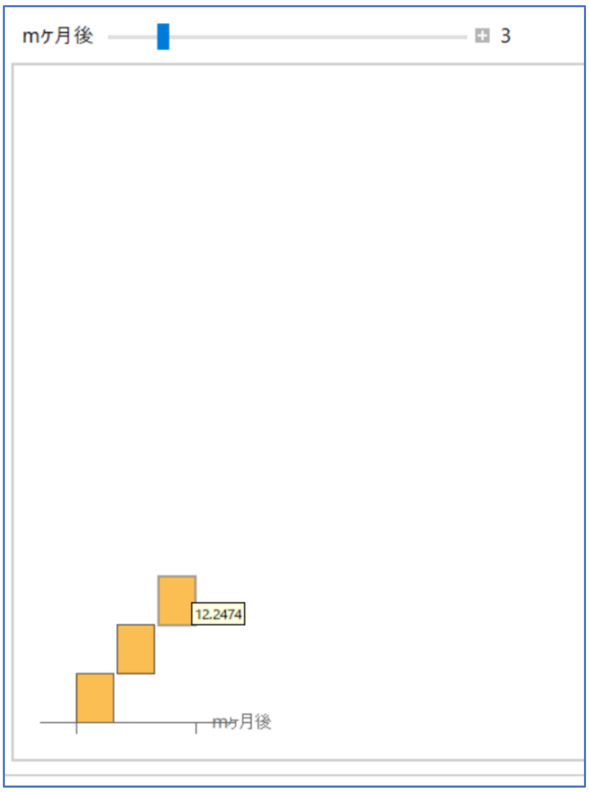
逃げる借金，追う積立

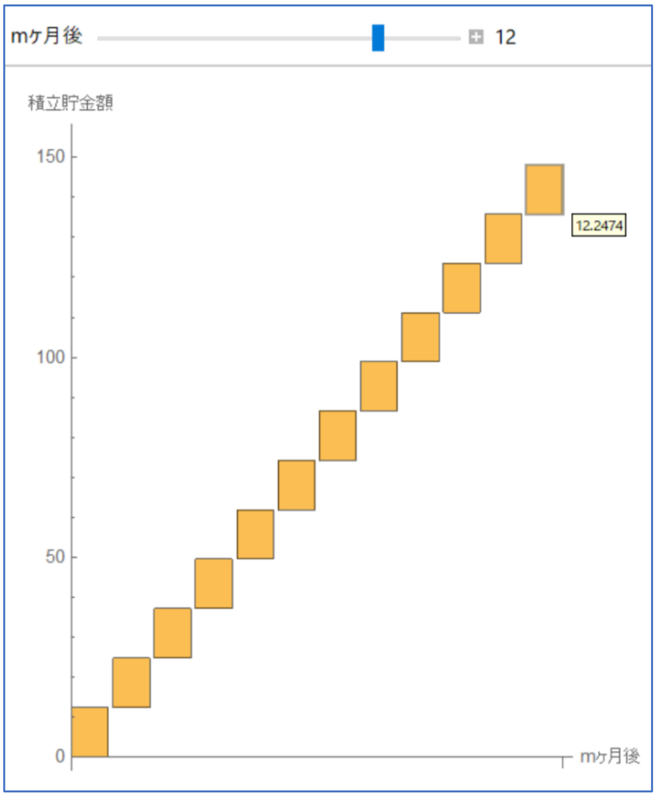
借金はそのままにしておけば，右図の緑の線のように増加していく。この式は

$4000 \times R^{12\times35}$　　　但し $R = 1 + \frac{0.015}{12}$

この増加する借金を，毎月 x 円ずつ返済していく。考え方としては，x 円ずつの積み立て貯金をする。そのときの貯金利率は住宅ローンの利率と同じである。

　以下に，積み立て預金でお金が増加するようすを可視化した。 x =12,2474 円ずつ積み立て貯金する。下左図は 3 ヶ月目の様子である。縦軸が積み立て貯金の元利合計額である。





1 回目の返済額 x 円は 2 か月分の利息がついて，122780 円に増えている。年利率が 1.5%と小さいの差が見えにくいが，2 回目の返済額も 1 ヶ月分の利息がついて，122627 円に増えている。昔に返済した金額ほど利息がついて増えている。この 3 つの金額の総和を逆順に並べると以下のような等比数列になる。

- $x \times R^0 = x \times 1$
- $x \times R^1$
- $x \times R^2$

公比は R，項数 n=3，初期値は x の等比数列である。肩の指数が 0, 1, 2 と増えていく.

等比数列の和の公式は以下である。

$$x \times \frac{1 - R^n}{1 - R}$$

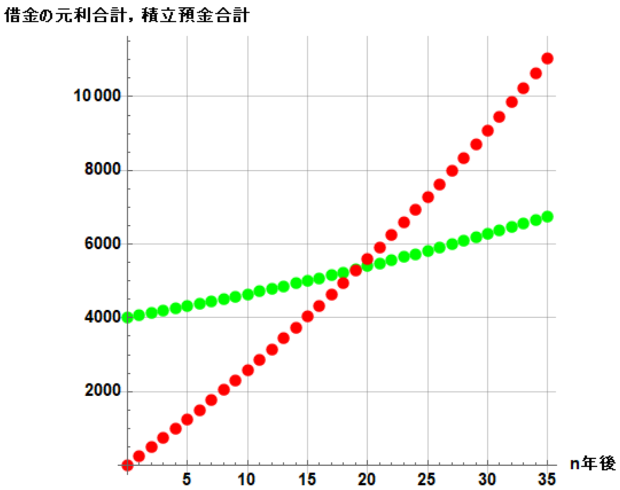
この等比数列の和の公式を使って，35 年目の積み立て貯金の総額を計算する。

$$x \times \frac{1 - R^{35*12}}{1 - R}$$

追撃法で，逃げる借金に積み立て貯金総額が追い付いたときを表そう．以下の等式となる。

$$4000 \times \mathrm{R}^{12\times35} = x \times \frac{1 - R^{35\times12}}{1 - R}$$

これを x について解くと，x=122473.7 が得られる。



35 年と言わずにもっと早く返済したいのであれば，月の返済額を増やせばよい。左図のように，早く追い付くことができる。

可視化のよい点は，残金がいくらあるかがよく分かることである。緑の値から赤の値を引き算する．左図で，5 年経過時点で，あと 2000 万円以上残金があることが分かる。10 年経過後では残金が 2000 万円より小さくなったことが分かる。

引用元：　稲妻に悟らぬ人の貴さよ　　芭蕉