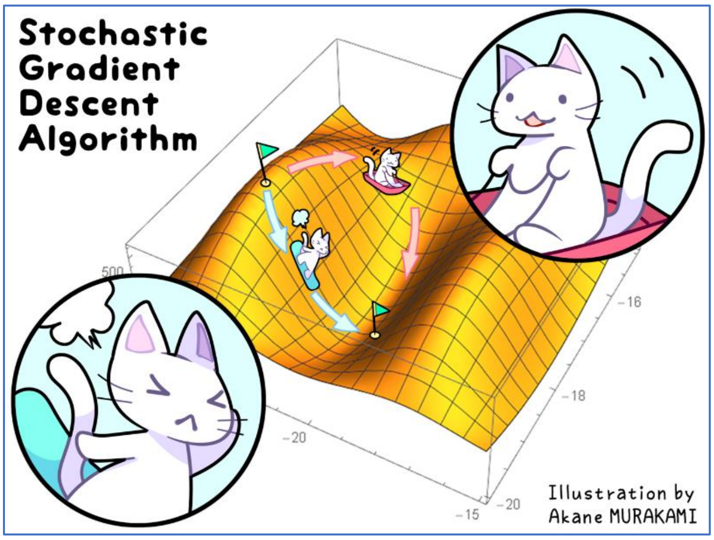
声援を集めて早しゴール際　＜偏微分を使って極小値を目指せ＞

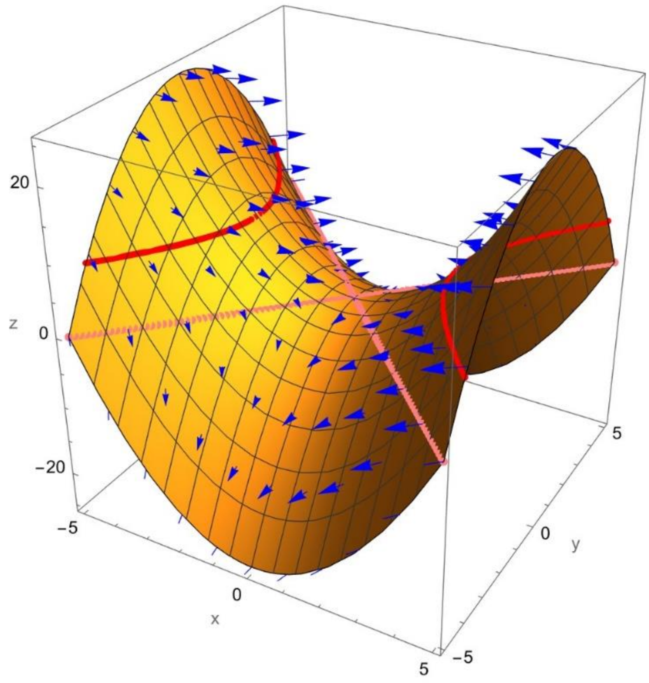
2022 年 12 月上旬　白田由香利

2 週間の測定期間を終えて血糖値測定装置 Free Style リブレの結果を携えて XXX 先生のクリニックに行く．恐る恐る装置を差し出すと，折れ線グラフを見ながら XXX 先生が「よく抑えてコントロールしていますね」とほめてくださった．「ほらこんなに（低い）」とナースさんにも見せてくれている．努力が認められたようで本当に嬉しかった．涙がでそうだ．こと血糖値と体重に関しては，ドクターや食生活指導のナースさんに（私の身体を心配してのことだが）強く叱られたり，事細かい注意を受けることはあっても，ほめられることなど皆無だった．人間，ほめられると嬉しい．

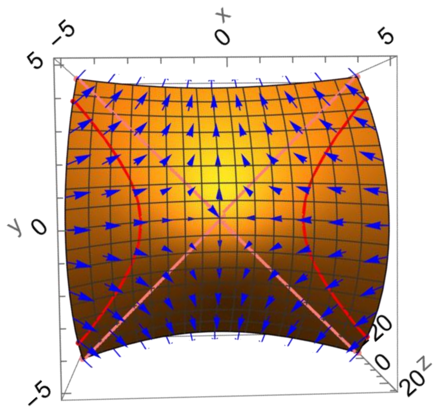
ワールドカップ，日本チームが何とドイツとスペインの大強豪チームに勝って，ベスト 16 に入った．これも非常に嬉しい．早朝の試合後の午後の経営数学の講義で「スペイン戦応援していた人，手をあげてください」．3 名が挙手してくれた．そのまま欠席した者もいるだろうに来ただけでもえらい．「今日は堂々と寝ていてもいいですから」と私．勝利のひとつの理由は，日本代表の多くの人がドイツやスペインなど外国チームでプレーしていることなのではないだろうか．むこうのレベルが上であれば，武者修行は成長に有効な手段だろう．私も元気を頂けた．私もコロナ期からの渡航再開として，少しヨーロッパでもまれてこようか，と思う(ディスカッションです)．円安も今，多少戻していることですし飛行機代も何とかなるでしょう．早速メールを DBKDA 2023(開催地バルセロナ)と EuROMA 2023(ベルギー)に書く．「チュートリアルやりたいのですが，だめですか？」もちろん，論文も投稿しよう．たかがサッカー，ではない．欧州ではサッカーが盛んなので，日本は今回の勝利で高く評価されたと思う．サッカーの勝利が私の背中を押してくれる．

さて，偏微分の話である．機械学習では，損失関数(エラー評価関数)の極小点に早く到達したい．下の図で猫さんがサーフボードで極小点まで滑り降りている．どちらの方向に滑り落ちれば最速で極小値に行けるか，偏微分の係数を使って決めると効率がよい．1000 次元のような高次元空間の極小値を解析的に求めることは不可能なので，足元周辺で偏微分の係数が負に大きいところを探して，1 歩進む．また，その足元周辺で偏微分係数が負に大きいところを探して 1 歩進む．

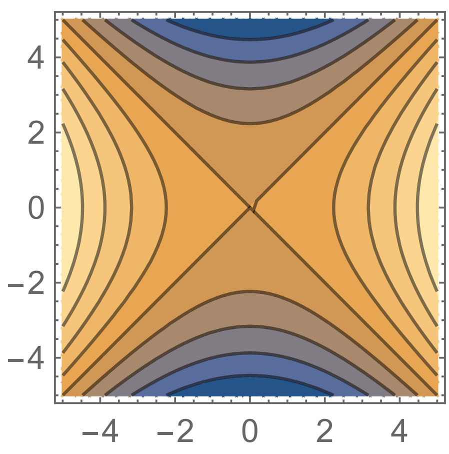




2 変数関数　$f(x,y) = x^2 - y^2$ を使って説明する．この関数は左図のような 3 次元曲面になる．馬の鞍のような形状をしている．$f(x,y) = c$ の等高線を 2 本描いた．ピンク色の直線 2 本は c=0 のときの等高線である．赤い曲線 2 本は，c=8 のときの等高線である．



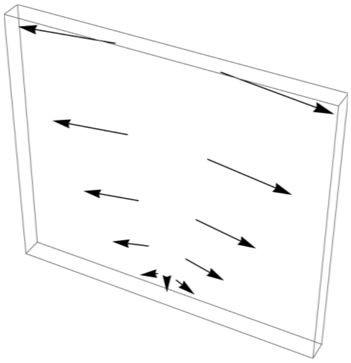
等高線の図を以下に示した．



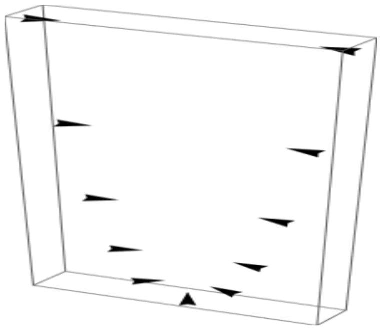
先ほどの猫さんのサーフボードが，1 点 A で f(x,y) に接している接平面だとしよう．接平面に垂直な直線を，その曲面の点 A における**法線**と呼ぶ．法線の方向は，偏微分で法線ベクトルを計算することで求められる．

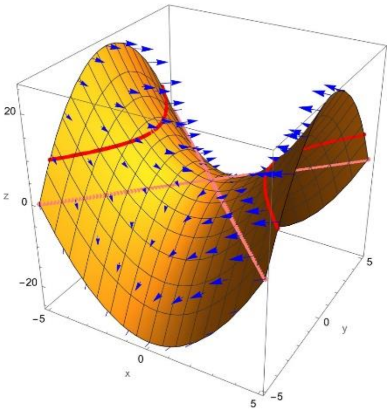
では，法線ベクトルを計算してみる．$z = x^2 - y^2$ とおき，これを変形して $x^2 - y^2 - z = 0$ のように右辺が 0 となるように変形する．この関数を g とおき $g(x,y,z) = 0$　とする．

$g(x,y,z) = 0$　の曲面の(x, y, z)における法線ベクトルは $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z})$ で計算できる．この関数 g では $(2x, -2y, -1)$ である．変数 x を x=-5 から 5 まで動かして y=0 と y は固定として，点(x, y, g(x,y))での法線ベクトルを描くと以下のようになる(下左図).



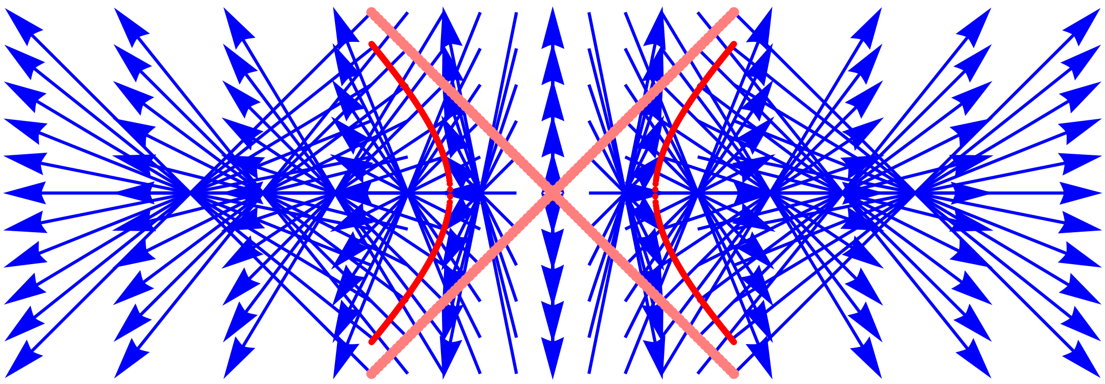
原点では法線は，垂直方向を向いている．法線の方向を表わす法線ベクトルは無数にある．任意の小数 k をかけて $k\ \times (2x,-2y,-1)$ が法線ベクトルである．法線ベクトルは法線ひとつに対して無数に存在する．k= - 0.1 のときの，$-0.1\ \times (2x,-2y,-1)$のようすを下右図で示した．



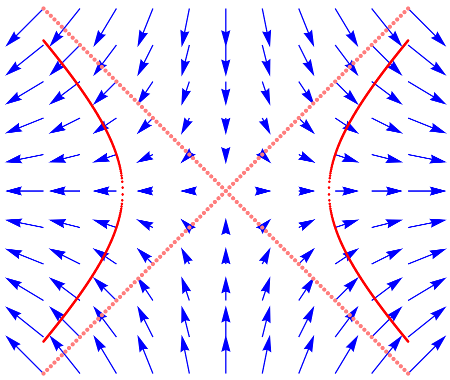


先ほどの f(x,y)に法線ベクトルを描いてみよう．$k=-0.08$，$k\,(2x,-2y,-1)$ という法線ベクトルを加えてみた(左図)．

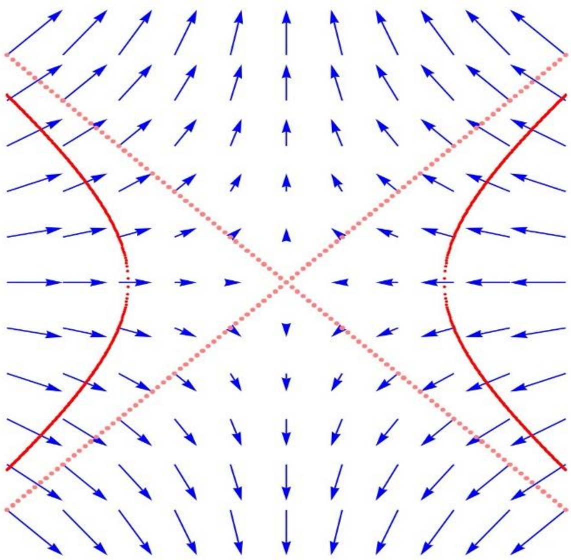
さて，この 3 次元曲面を 2 次元平面 x-y にマッピングして，各点で勾配ベクトル$\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$を描いてみた．勾配ベクトルは　(2x, -2y)である．



これでは，ベクトルが長すぎてよくわからないので，各要素を 0.1 倍した(下図参照).

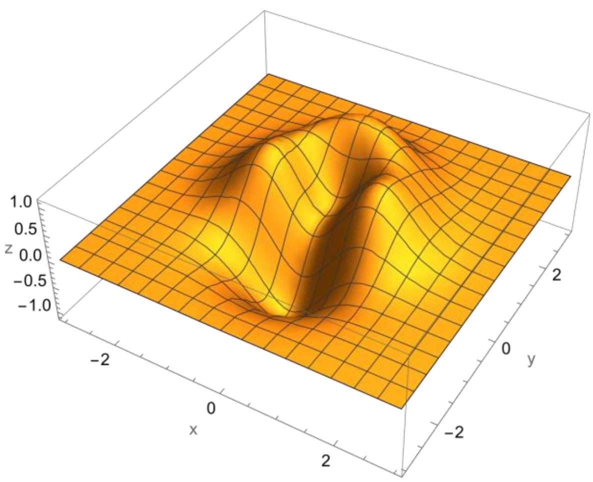


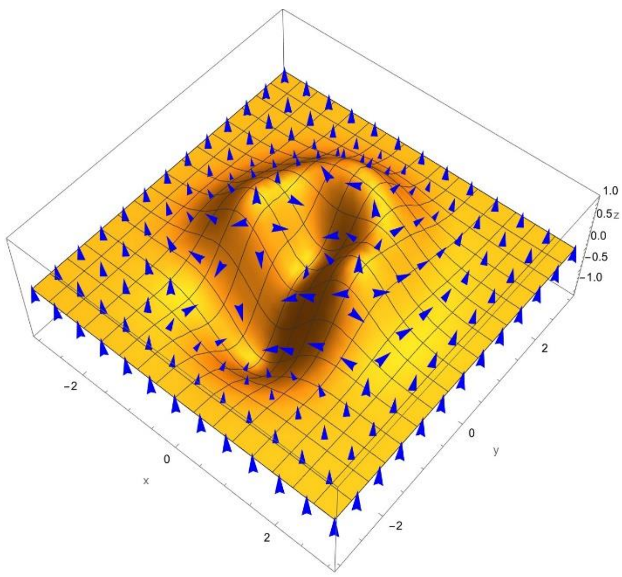
猫さんがどの方向に進もうか迷っているとする．この勾配ベクトルの方向が，関数の値を最も増加させる方向である．ベクトルの長さが増加する大きさも表している．原点では，接平面が水平になっているので，勾配ベクトルは(0, 0)である．猫さんは損失関数の極小値を目指していたのだから，その勾配ベクトルの逆方向に進めばよい(下図参照).



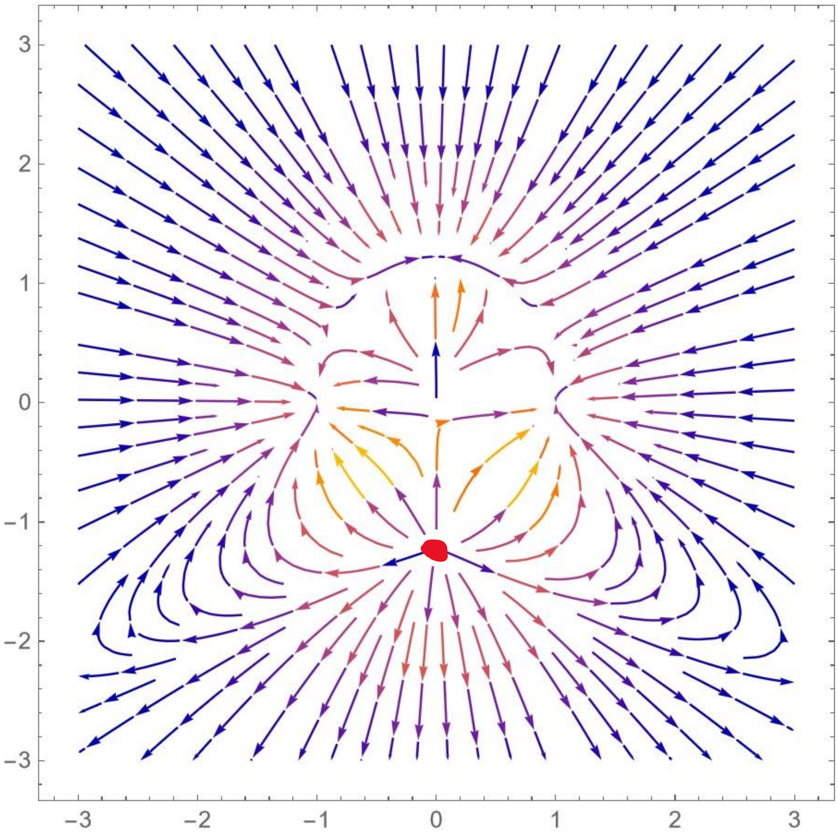
猫さん，このベクトルの方向に進んでいってください． あらら，$f(x,y) = x^2 - y^2$ には鞍点(原点のところです)はあっても極小点はありません．この関数には，極小点がありませんでした．

このままで終わるのは気持ちがわるいので，以下のような関数を考えましょう．王様の椅子のような形状です。





法線ベクトルも描いてみました．k= —0.1 倍してあります.



勾配ベクトルは左図のようになります．図中赤丸の点が極小値です．猫さん，これは勾配ベクトルですから，この矢印と逆方向に進めば極小値にいけますよ．しかし，椅子の外側が初期位置ですと，どんどん外側に進んでいってしまい，極小値には到達できません．初期値も大事なのですね．

終わり

引用元：五月雨を集めて早し最上川　芭蕉