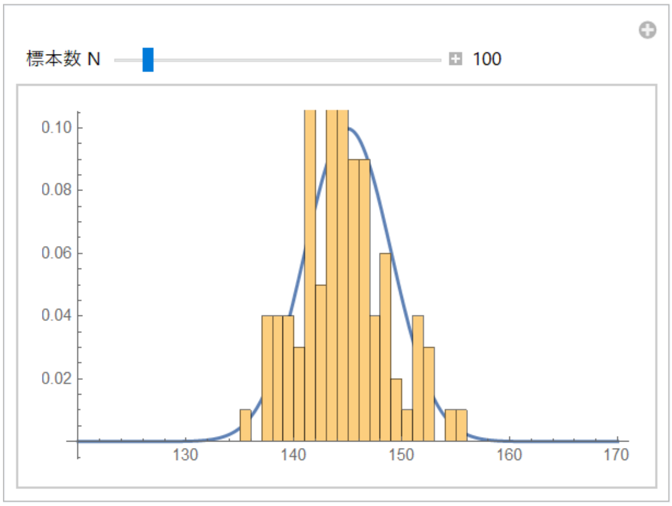
不思議やな　e に着せたる d の面　＜正規分布＞

2020 年 10 月下旬　白田由香利

自然対数 e の x 乗の微分の公式は全く不思議だ.

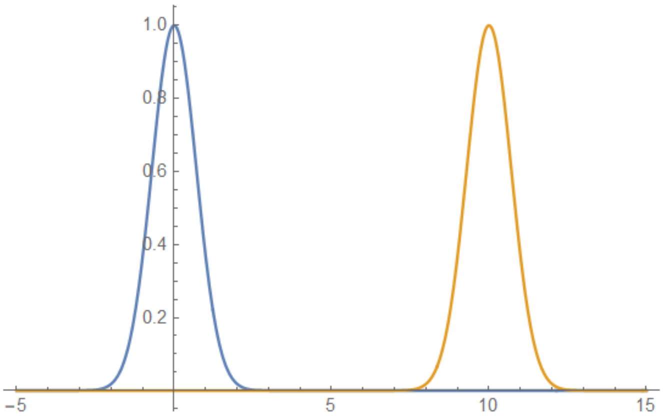
$$\frac{de^x}{dx} = e^x$$

微分して導関数を求めると，またe^xに戻ってしまう．導関数のカーブがこの指数関数カーブと完全に一致する．そんな不思議な数 e は正規分布の確率密度関数にも出現している．平均μ，分散σ^2の正規分布は N(μ，σ^2) と表す．正規分布は英語で Normal Distribution という。そこで、正規分布を表すときは $N(\mu，\sigma^2)$とあらわすことが多い。N は Normal の頭文字である。正規分布の形状は、試行回数や特定の事象の生起確率ではなく、期待値μと分散σ^2で定まる。正規分布の確率の関数（確率密度関数） f は次のように与えられる。



$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

きわめて複雑な関数に見えるが、よく見ると定数が多い。e は自然対数の底であり、π は円周率である.



正規分布には，不思議な数 e の他，不思議な数πも含まれている．また、μ と σ^2は平均と分散である.

このカーブがどうして小山型になるかというと，

$$y = e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$$

は y 軸に対して対象であり x の絶対値が大きくなるほど値が小さくなる(右図の青色曲線)．そして，

$$y = e^{-(x-10)^2}$$

は，この曲線を x 軸＋方向に 10 ずらした曲線である(上図の黄色曲線).

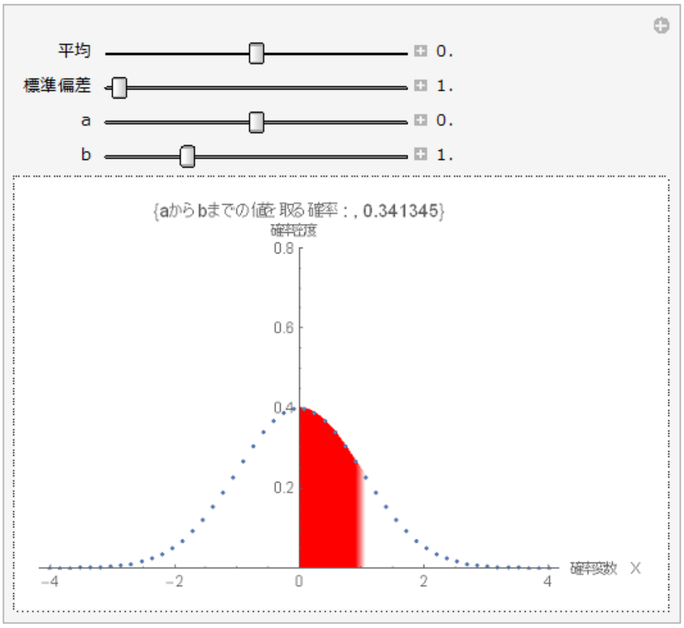
$y = e^{-(x-\mu)^2}$　は x ＝ μ のところで最大値を取る.

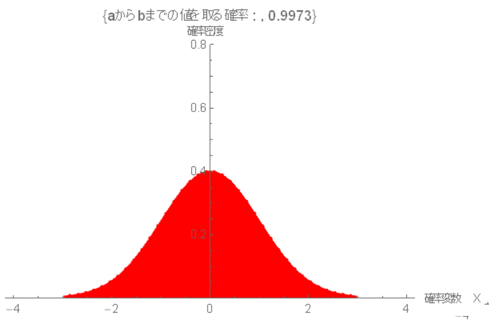
確率密度関数は特定の一点ではなく、ある範囲の確率を与えるものである。具体的には、確率を得たい範囲について確率密度関数を定積分して確率を得る。つまり、確率は確率密度関数の「高さ」ではなく、確率密度関数の曲線の下にある部分の面積として与えられる．下の図は N(0,1)の確率密度関数を示して

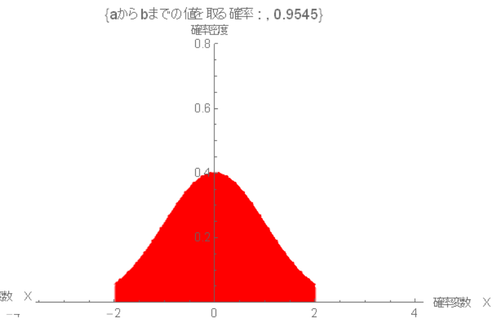
いる。なお、この図は以下の URL でインタラクティブに試すことができる。

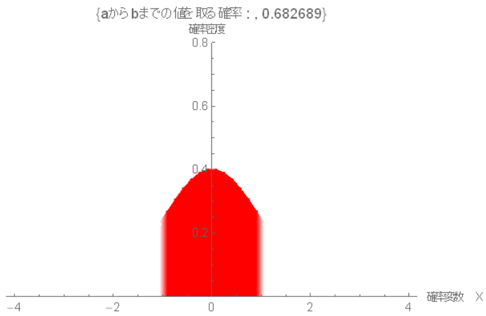
http://www-cc.gakushuin.ac.jp/~20010570/VDStat/latestCDF/

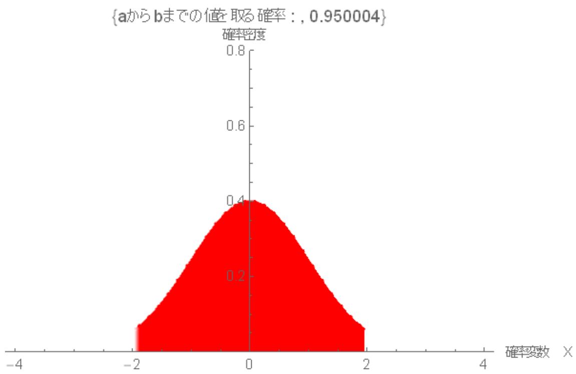
確率は x の区間に対して定められ、確率密度関数のグラフにおいては、グラフの線と横軸の間の面積がその確率となる。N(0, 1)に従う確率変数が, 0 から 1 の間の値を取る確率 Pr(0≦x≦1)は 34%である.









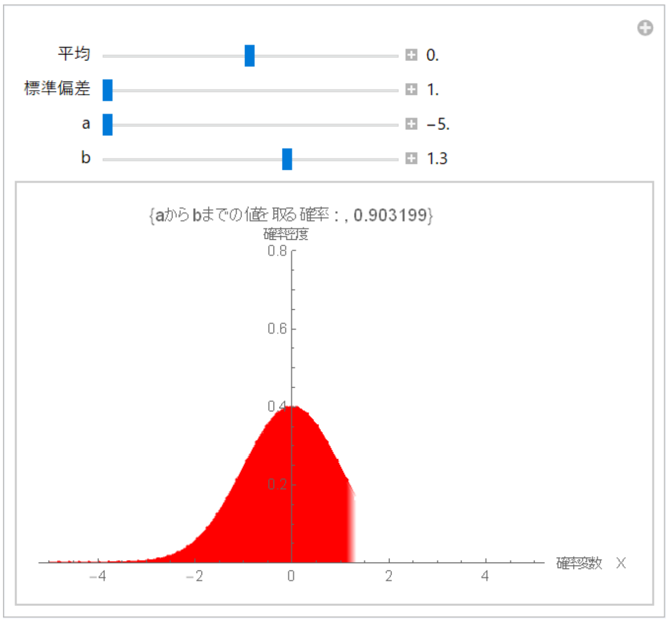


上図にあるように確率 Pr(-3≦x≦3)は 99.7%, 確率 Pr(−2≦x≦2)は 95.5%, 確率 Pr(−1≦x≦1)は 68.3%である. 一般に, $N(\mu,\ \sigma^2)$において, 確率 Pr(-3σ≦x≦3σ)は 99.7%, 確率 Pr(−2σ≦x≦2σ)は 95.5%, 確率 Pr(−1σ≦x≦1σ)は 68.3%である.

信頼性 95%の区間といえば, 右図に示すように, -1.96σ≦x≦1.96σの範囲である. この 1.96 という数値は覚えておいたほうがよい.

Pr(1.96σ≦x)は 2.5%となる.

Pr(−1.96σ≧x)も 2.5%となる.



それから，正規分布において，上から１０%の値で足切りという場合は，その境界値は何 σ のところだろうか？

答えは左の図に示すように，約 1.3 σ である．赤の面積が確率 90%を示している．

こうした正規分布の指定範囲の確率を求めるのは，数学ツール及び EXCEL で求めることができる．

終わり

引用元：年どしや猿に着せたる猿の面　　芭蕉